

Fascicule de TD

Université Claude Bernard Lyon1



FIGURE 1 – La gravure sur bois dite « de Flammarion ».

Astrophysique pour la licence
Université Lyon 1

Version du 14 janvier 2020

Chapitre 1

Vie des étoiles

1.1 La lumière des étoiles

1.1.1 Photosphère et température effective

Exercice 1 Luminosité du Soleil

Calculer la luminosité du Soleil à partir de sa température effective $T_{\odot} \approx 5770$ K et de son rayon $R_{\odot} \approx 6,96 \times 10^8$ m.

Exercice 2 Rayon des étoiles

Déterminer le rayon (en unité solaire), la longueur d'onde de Wien et la couleur « visible » des étoiles suivantes :

1. Naine blanche : $L = 10^{-2} L_{\odot}$, $T_e = 20\,000$ K
2. Géante rouge : $L = 10^2 L_{\odot}$, $T_e = 4200$ K
3. Supergéante : $L = 10^5 L_{\odot}$, $T_e = 6000$ K

Rappel de la loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m K}$.

Exercice 3 Équilibre radiatif de la Terre

Soit L_{\odot} la puissance lumineuse du Soleil, R_{\oplus} le rayon de la Terre, D la distance Terre-Soleil et T_{\oplus} la température effective à la surface de la Terre :

1. Écrire la relation entre L_{\odot} et $f(D)$, le flux lumineux à une distance D du Soleil. En déduire la puissance lumineuse totale P_r reçue par la Terre.
2. Utiliser la loi de Stefan et expliciter le flux lumineux f_e , puis la puissance totale P_e , rayonnés par la Terre.
3. Écrire l'égalité des puissance reçue et rayonnée à la surface de la Terre, en déduire l'expression de la température T_{\oplus} en fonction des données du problème.
4. Application numérique : $L_{\odot} = 3,85 \times 10^{26}$ W, $R_{\oplus} = 6400$ km, $D = 1,500 \times 10^{11}$ m, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴.
5. Commenter sur la validité et les limites de ce modèle.

1.1.2 Système de magnitudes

Exercice 4 Système binaire

Les deux composantes de l'étoile α du Centaure située à 1,32 pc de distance ont des magnitudes visuelles (magnitude apparente dans la bande V) de 0,30 et 1,70. On demande :

1. Le rapport des flux des deux étoiles dans la bande V .
2. La magnitude visuelle globale du système.
3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes de ce système pour obtenir les magnitudes absolues.

1.2 Classification spectrale

1.2.1 Mesures des distances

Exercice 5 Incertitude

Relier l'incertitude sur la distance ΔD à celle sur la parallaxe Δp .

Exercice 6 Astrométrie spatiale

Considérons les deux missions d'astrométrie spatiale : Hipparcos (1989), avec une incertitude absolue sur la mesure de la parallaxe typique de $\Delta p = 2$ mas, et Gaia (2013), avec $\Delta p = 7 \mu\text{as}$. Quelles sont les précisions obtenues à une distance de 100 pc ? de 1000 pc ? À quelle distance aura-t-on une erreur de 100% ?

Exercice 7 Parallaxe et magnitude absolue

Le tableau suivant donne la magnitude apparente m_V et la parallaxe p de trois étoiles. Calculer leur distance D avec son incertitude, l'erreur relative sur la distance $\Delta D/D$ et leur magnitude absolue M_V .

	α CMa (Sirius)	α Tau (Aldebaran)	α Ori (Bételgeuse)
m_V	-1,47	0,85	0,58
p (mas)	$379,2 \pm 1,6$	$50,1 \pm 1,0$	$7,6 \pm 1,6$

Exercice 8 Méthode du point convergent

On veut déterminer la distance de l'amas des Pléiades par la méthode du point convergent.

- L'étude des trajectoires des étoiles de l'amas sur plusieurs années a permis de situer le point convergent à $\theta = (67,9 \pm 0,6)^\circ$ de la direction de l'amas.
- L'observation du spectre de l'étoile Alcyone, faisant partie de cet amas, a permis de mesurer sa vitesse radiale $v_r = (10,1 \pm 0,3) \text{ km s}^{-1}$.
- Le mouvement propre apparent de cette même étoile vaut $\mu = (47,3 \pm 0,8) \text{ mas an}^{-1}$.

Déterminer la distance de l'amas.

Exercice 9 Méthode de Baade-Wesselink (examen 2017)

Les étoiles variables sont des étoiles dont la magnitude apparente, et donc le rayon, évolue périodiquement. Nous étudions ici la méthode (simplifiée pour l'exercice) de Baade-Wesselink pour déterminer la distance de ces objets (Baade 1926, Wesselink 1969).

Considérons donc une étoile sphérique dont le rayon $R(t)$ varie du fait du déplacement de sa photosphère à la vitesse radiale $v(t)$.

1. Donner le diamètre angulaire apparent de l'étoile $\theta(t)$ en fonction de $R(t)$ et de D .
2. Quel est le lien entre une variation de rayon dR et une variation de diamètre apparent $d\theta$? En déduire l'expression de D en fonction de $v(t)$ et $\dot{\theta}(t) = d\theta/dt$, expression sur laquelle repose la méthode de Baade-Wesselink.
3. Pour mesurer la vitesse $v(t)$ de déplacement de la photosphère à un instant t , nous observons un décalage en longueur d'onde d'une raie d'absorption. Elle est mesurée à $\lambda = 589,536 \text{ nm}$, pour une longueur d'onde au repos de $\lambda_0 = 589,592 \text{ nm}$. En déduire la vitesse $v(t)$ de la photosphère.

$\theta(t)$ étant très petit ($\theta(t) \ll 1$), il n'est pas possible de le mesurer directement, ni *a fortiori* ses variations. Cependant, nous pouvons exploiter la dépendance de la luminosité L de l'étoile avec θ . Pour ce faire, nous introduisons la brillance de surface apparente de l'étoile définie par $l = f(D)/\theta^2$, où $f(D)$ est le flux reçu à la distance D , et θ le diamètre angulaire.

4. Montrer que l est une quantité intrinsèque indépendante de la distance.
5. Relier la magnitude apparente $m = -2,5 \log_{10}(f/f_0)$ de l'étoile à sa magnitude surfacique $s \triangleq -2,5 \log_{10}(l/f_0)$ (f_0 est la valeur de référence du système des magnitudes) et son diamètre angulaire θ (les unités de s et θ sont alors liées, p.ex. mag arcsec⁻² et arcsec).
6. En supposant que l (et donc s) est une grandeur constante, montrer que $\dot{\theta} = -0,2 \ln 10 \times \dot{m} \times 10^{0,2(s-m)}$.

Par une analyse interférométrique que nous ne détaillons pas ici, on mesure pour notre étoile $s = -10 \text{ mag arcsec}^{-2}$. On observe par ailleurs que la magnitude oscille sur une période de $\Delta t = 14$ jours de $\pm \Delta m = 0,2 \text{ mag}$ autour d'une valeur moyenne $m_0 = 4,0 \text{ mag}$.

7. Quel est le taux de variation $\dot{\theta} \approx (2\Delta\theta)/(\Delta t/2)$ du diamètre angulaire?
8. En déduire la distance D de l'étoile.

1.2.2 Classification stellaire

Exercice 10 Types spectraux

Donner approximativement le type spectral des étoiles dont le flux est maximal aux longueurs d'onde suivantes : 300 nm, 500 nm, et 1,2 μm . Peut-on déterminer la classe de luminosité?

Exercice 11 Diagramme HR

Classer par ordre de température effective croissante, puis de rayon croissant, et enfin de luminosité croissante les étoiles de types spectraux suivants : M5III, O2V, K7I, A0VII.

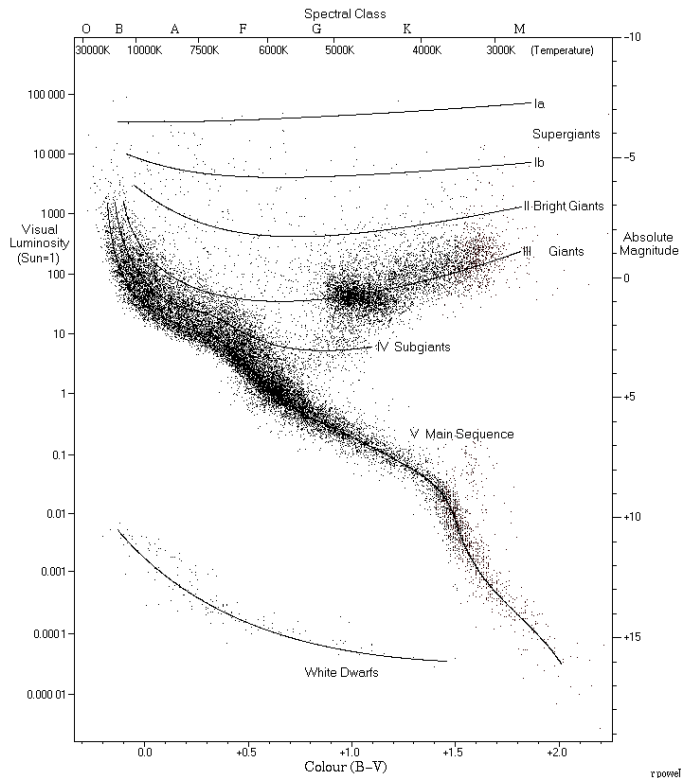


FIGURE 1.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russell des 22000 étoiles du catalogue Hipparcos et de 1000 étoiles faiblement lumineuses du catalogue Gliese des étoiles proches.

1.2.3 Mesure des rayons

Exercice 12 Interférométrie

Le tableau suivant donne le diamètre apparent θ_* des étoiles de l'exercice 7, mesuré par interférométrie. Calculer leur rayon R (on rappelle les distances déterminées dans l'exercice précédent) et, à l'aide de ce résultat, attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité parmi les suivantes : I, III, V.

	α CMa	α Tau	α Ori
θ_* [mas]	5,89	24	67
d [pc]	2,64	20	130

1.2.4 Mesure de masse (étoiles doubles)

Exercice 13 Système binaire

On observe une étoile double visuelle dont le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée.

- La parallaxe de ce système est de 100 mas.
- La plus grande séparation angulaire entre les deux composantes est de $5''$, et la plus petite de $1''$.
- La période de révolution est de 30 ans.
- Le compagnon est toujours observé à une distance du centre de gravité 5 fois plus grande que celle de l'étoile primaire.

Déterminer la masse de chaque composante.

Exercice 14 Le paradoxe d'Algol

Le tableau suivant rappelle les caractéristiques du système binaire à éclipse d'Algol (β Per) :

p (mas)	$35,14 \pm 0,90$	
T (jours)	2,8674	
θ_{rel} [mas]	2,283	
Composantes	A	B
Type spectral	B8V	K2IV
R/R_{\odot}	2,74	3,60
θ_{abs} (mas)	1,872	

On supposera l'orbite circulaire, ainsi le demi-grand axe de l'ellipse projetée est égal au rayon de l'orbite.

1. Quelle est la distance (et son erreur) de ce système ?
2. Quelle est la séparation des deux étoiles ? Comparez-la à leurs rayons.
3. Quelle est la masse de chacune des étoiles ? Compte-tenu des types spectraux, décrire le *paradoxe d'Algol* et suggérer une solution.

1.3 Les systèmes planétaires

1.3.1 Les lois de Kepler

Exercice 15 Invariant de Runge-Lenz (facultatif)

On considère une particule P de masse m , animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine O . Ce mouvement est dû à un champ de forces $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}U(r)$ dérivant d'un potentiel central $U(r)$, où $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$.

À l'instant t on note respectivement $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{p}(t)$ la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de la particule P .

1. Montrer que la force \mathbf{F} est radiale.
2. Montrer que le vecteur moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ est conservé au cours du mouvement. En déduire que la trajectoire de P est située dans un plan Π que l'on caractérisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ est une constante du mouvement.
4. Calculer L à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Π et en déduire la loi des aires.

Dans toute la suite du problème, le potentiel est de la forme : $U(r) = -k/r$ avec $k > 0$.

On définit le *vecteur de Runge-Lenz* :

$$\mathbf{A} \triangleq \frac{1}{k} \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

5. Montrer que le vecteur \mathbf{A} est constant dans le temps, et qu'il appartient au plan Π .
6. Montrer que :

$$A^2 = 1 + 2 \frac{L^2 E}{mk^2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées polaires : en particulier $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$). En déduire, lorsque L est fixé, une borne inférieure pour l'énergie E . Montrer que pour un mouvement circulaire, E est égal à la borne inférieure.

7. Calculer le produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ en fonction de L , m , k et r . Établir alors l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Indication : on définira l'angle θ à partir de l'axe polaire dirigé selon le vecteur \mathbf{A} .

Vérifier que $e = \|\mathbf{A}\|$ et exprimer p en fonction de L , m et k .

8. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de E .

Dans la suite du problème on se restreint au cas des *états liés* : $E < 0$. La trajectoire est alors une ellipse.

9. Déterminer son demi-grand axe a et son demi-petit axe b en fonction de m , k , L et E .
10. Quelle est la valeur maximale L_0 de L , l'énergie E étant fixée ?
11. Quelle est la trajectoire pour $L = 0$, et pour $L = L_0$?
12. Calculer la période du mouvement en fonction de m , k et a .

Exercice 16 Orbite de Pluton

L'orbite de Pluton est très excentrique ($e = 0,248$). Son demi-grand axe vaut 39,43 UA. Montrer que Pluton peut être plus proche du Soleil que Neptune dont le demi-grand axe de l'orbite vaut 30,06 UA et l'excentricité 0,009.

Exercice 17 Vitesses périhélique et aphélique

Montrer que la vitesse angulaire d'un objet décrivant une orbite elliptique autour du Soleil augmente lorsqu'il s'en rapproche. Montrer que le rapport des vitesses au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) ne dépend que de l'excentricité de l'orbite. Calculer ce rapport pour la Terre dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,0167, puis pour la comète de Halley dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,97.

Exercice 18 Satellite géostationnaire

Sachant que la Lune décrit son orbite autour de la Terre en 27,32 jours et que le demi grand-axe de son orbite vaut 384400 km, calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. On supposera que la masse de la Lune est négligeable par rapport à celle de la Terre (la Terre est environ 80 fois plus massive que la Lune).

Chapitre 2

Vie des galaxies

2.1 Milieu interstellaire

2.1.1 Mise en évidence expérimentale

Exercice 19 Comptage d'étoiles

Dans une observation de comptage d'étoiles, toutes de même type, on constate que :

- pour une magnitude apparente $m \leq 7$, le nombre d'étoiles $N(m)$ de magnitude apparente inférieure à m est tel que $\log N(m) = 0,6m + 3$,
- pour $m \geq 9$, on obtient $\log N(m) = 0,6m + 2,4$.

1. Déterminer l'extinction totale en magnitude A du nuage traversé quand on passe de $m = 7$ à $m = 9$.
2. On sait que la magnitude absolue des étoiles de ce type est $M = 5$. Déterminer la distance r_1 du front proche du nuage, ainsi que son épaisseur $r_2 - r_1$.

Exercice 20 Densité des galaxies dans l'Univers (examen 2013)

E. Hubble (1934, *The Distribution of Extra-Galactic Nebulae*, ApJ, **79**, 8) a mesuré que le nombre de galaxies $N(m)$ jusqu'à une certaine magnitude limite m par degré carré décroît avec la latitude galactique¹ b (pour $|b| > 15^\circ$). Ainsi, la densité de galaxies semble diminuer à mesure que l'on s'éloigne des pôles de la Galaxie ($b = \pm 90^\circ$). Cela ne reflète évidemment pas la distribution intrinsèque des galaxies dans l'Univers, mais résulte d'un effet d'absorption de la lumière par les particules de poussière contenues dans notre propre Galaxie.

On suppose que la poussière est répartie de façon homogène dans le disque galactique ($b = 0$) d'épaisseur $2h$, que l'observateur se situe dans le plan médian, et que toutes les galaxies sont des sources ponctuelles de même magnitude absolue M et uniformément distribuées dans l'espace avec une densité numérique n .

1. Exprimer l'épaisseur ℓ de poussière traversée à une latitude b . En déduire l'extinction interstellaire $A(b)$, en notant A_0 l'atténuation en magnitude aux pôles galactiques.
2. Dans ces conditions, montrer que le nombre cumulé $N(m, b)$ de galaxies (rapporté à l'ensemble de la sphère céleste) de magnitude apparente maximale m et à la latitude b est donné par :

$$\log N(m, b) = 0,6m - 0,6 \frac{A_0}{\sin b} + K.$$

Exprimer la constante K en fonction des données du problème.

3. Hubble (1934) a mesuré, pour des galaxies de magnitude absolue moyenne $M = -14$:

$$\log N(m, b) = 0,6m - \frac{0,15}{\sin b} - 4,50.$$

En déduire la densité moyenne n des galaxies dans l'Univers (en Mpc^{-3}).

2.1.2 Extinction sélective et rougissement

Exercice 21 Interprétation physique

Une étoile est située à 2 kpc de l'observateur sur une ligne de visée représentative des conditions moyennes du MIS, pour lesquelles l'extinction moyenne en bande V est de 0,3 mag/kpc. En admettant que cette extinction n'est due qu'à des grains dont les caractéristiques suivent :

- rayon $a = 0,1 \mu\text{m}$,
- efficacité d'extinction $Q_{ext} = 1$ (approximation géométrique),

1. L'angle entre le plan galactique et l'objet considéré, compté positivement vers le pôle nord galactique.

- masse volumique : 1 g cm^{-3} ,
- répartition des grains uniforme sur la ligne de visée ;

calculer :

1. la profondeur optique, puis la densité de colonne des grains le long de la ligne de visée,
2. Le nombre de grain par unité de volume sur cette ligne de visée,
3. la masse volumique des grains dans le MIS.

En admettant que la densité moyenne d'atomes d'H est de l'ordre de 8 atomes par cm^3 , et en négligeant la présence des atomes d'autres éléments, calculer (on donne la masse du proton $m = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$) :

4. la masse volumique du gaz dans le MIS,
5. le rapport (masse volumique des grains)/(masse volumique du gaz).

Qu'en concluez vous sur le rôle des grains dans la matière du MIS ?

Exercice 22 Rougissement et température

En admettant que l'on observe un objet à la température T , dont le spectre est donné par la loi de Planck :

$$W(\lambda) = C \lambda^{-5} \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]^{-1}$$

En présence d'une extinction $A(\lambda) = a/\lambda$, montrez que :

1. pour $\lambda \ll hc/kT$ (limite de Wien), dans la partie bleue du spectre, le spectre observé est celui d'un corps noir à une température T' , que l'on déterminera ;
2. pour $\lambda \gg hc/kT$ (limite de Rayleigh-Jeans), dans la partie rouge du spectre, le spectre observé est identique à celui de la source.

Exercice 23 Rougissement et couleur

Une étoile $G5V$ a une magnitude absolue $M_V = 5$, et un indice de couleur intrinsèque $(B - V)_0 = 0,7$. On observe une étoile de ce type spectral, située à une distance de 5 kpc.

1. Calculer les magnitudes apparentes V_0 et B_0 qu'aurait cette étoile s'il n'y avait aucune extinction.
2. L'étoile est située dans une région où l'extinction du MIS peut être caractérisée par :
 - une extinction de $0,3 \text{ mag/kpc}$ en bande V ,
 - une loi d'extinction de la forme : $A(\lambda) = A_V \times (\lambda_V/\lambda)$.

Calculer les extinctions A_V et A_B qu'elle subit du fait de cette loi d'extinction.

3. Calculer l'excès de couleur $E(B - V)$ de cette étoile par rapport à une étoile très proche de même type spectral.
4. Calculer l'indice $(B - V)$ observé en présence d'extinction.
5. À l'aide du diagramme HR, déterminer le type spectral apparent de l'étoile.
6. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction sélective sur la « couleur » d'une étoile.

On rappelle les longueurs d'onde effectives des bandes V et B : $\lambda_V = 550 \text{ nm}$ et $\lambda_B = 440 \text{ nm}$.

Exercice 24 Excès de couleur

On a déterminé par spectroscopie le type spectral $B2V$ pour une étoile lointaine. L'indice de couleur intrinsèque de ce type d'étoiles est $(B - V)_0 = -0,25$. Par photométrie on a déterminé un indice de couleur observé $(B - V) = 2,25$.

1. Déterminer l'extinction A_V de cette étoile à partir de la loi de variation de $A_\lambda/E(B - V)$ en fonction de $1/\lambda$ (Fig. 2.1).
2. Quelle sera l'extinction de cette étoile dans la bande photométrique infrarouge K ?
3. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction dans l'infrarouge, comparé à celui dans le visible ?

2.2 Galaxies

2.2.1 Classification morphologique des galaxies

Exercice 25 Propriétés « physiques » de la classification

En vous servant du tableau 2.1, répondez aux questions suivantes :

1. Que peut-on dire sur la fraction de gaz dans les galaxies selon le type morphologique ?
2. Que peut-on dire de la densité surfacique de masse, en supposant que toute la masse des galaxies est concentrée dans un disque mince ?

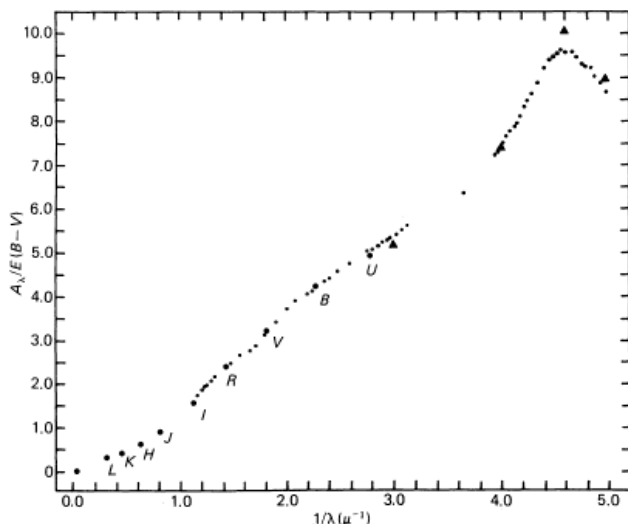


FIGURE 2.1 – Loi de couleur : $A_\lambda/E(B - V)$ en fonction de $1/\lambda$. On y lit p.ex. que $A_V/E(B - V) \simeq 3,1$.

TABLE 2.1 – Propriétés quantitatives de la séquence de Hubble.

Propriétés	E,S0	S0a,Sa	Sab,Sb	Sbc,Sc	Scd,Sd	Sm,Im
$M_{\text{totale}} (10^{10}M_\odot)$		22,6	32,4	19,0	7,9	1,6
$M_{\text{gaz}} (H \text{ neutre en } 10^9M_\odot)$	1,24	5,62	15,14	15,85	9,33	2,40
Diamètre (kpc)	21,1	19,8	25,1	22,4	17,7	8,5

2.2.2 Constituants des galaxies

Exercice 26 Les étoiles

Si l'on considère une sphère de rayon 10 kpc peuplée par 10^{11} étoiles dont le rayon est égal à celui du Soleil, calculez la fraction de volume occupé par les étoiles.

Exercice 27 La matière noire

On considère une galaxie et ses étoiles réparties uniformément en fonction de la distance au centre de la galaxie. On désigne par $M(R)$ la masse totale des étoiles contenues à l'intérieur de la sphère de rayon R .

1. Si les étoiles sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour du centre de la galaxie, donner la relation entre l'accélération normale a d'une étoile située à la distance R de ce centre et sa vitesse V .
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour cette étoile. En déduire la relation entre V et R . Comment varie alors V en fonction de R ?
3. Dans les galaxies spirales, on observe au-delà d'un certain rayon R_0 que la vitesse de rotation du gaz et des étoiles atteint une valeur limite $V_0 > 0$. Commentez.
4. Quelle forme de la densité de masse $\rho(R)$ doit-on présumer pour atteindre une valeur constante de V quand R augmente ? On rappelle que, sous l'hypothèse de symétrie sphérique, $dM = 4\pi R^2 \rho(R) dR$.

Exercice 28 Courbes de rotation des galaxies (examen 2018, facultatif)

On considère une galaxie spirale à symétrie sphérique (peu réaliste!), de rayon R et de masse totale M . On considère que la galaxie est homogène, de masse volumique ρ .

Matière visible.

1. Calculer la masse $M(r)$ contenue à l'intérieur du rayon r (distinguer les cas $r \leq R$).
2. Exprimer l'accélération normale $a(r)$ d'une étoile en orbite circulaire uniforme de rayon r et de vitesse $v(r)$. Relier $a(r)$ à l'accélération gravitationnelle $g(r)$.
3. En déduire la vitesse de rotation $v(r)$ d'une étoile à la distance $r \leq R$, et tracer l'allure de cette courbe de rotation. Interpréter le comportement aux grands rayons.
4. Sur le même schéma, comparer cette courbe de rotation avec celles traditionnellement observées dans les galaxies spirales. Conclure.

Matière sombre. Afin de reproduire la courbe de rotation observée, on considère que la galaxie possède, *en plus* de sa composante visible précédente, un halo de matière « sombre », invisible, à symétrie sphérique, de masse volumique

$$\rho_H(r) = \frac{\rho_c}{(1 + r/r_c)^2},$$

où r_c est la taille caractéristique du « cœur » du halo.

5. Calculer la masse $M_H(r)$ de matière sombre contenue à l'intérieur du rayon r . On note $f(x) = x - 1/(1+x) - 2\ln(1+x)$ la primitive de $x^2/(1+x)^2$. (Vérifiez évidemment l'homogénéité de votre expression!)
6. Déterminer et tracer schématiquement la courbe de rotation $v_H(r)$ *uniquement* liée à la présence du halo.
7. En déduire finalement l'expression de la courbe de rotation *totale* $v_T(r)$ de la galaxie, incluant les contributions des composantes visible et sombre. Comment s'exprime-t-elle en fonction de $v(r)$ et $v_H(r)$? Vers quelle valeur v_∞ tend la vitesse de rotation aux grandes distances?
8. La distribution de matière sombre donnée ci-dessus peut-elle s'étendre jusqu'à $r = +\infty$? Conclure.

Gravité modifiée. Face aux problèmes posés par le halo de matière sombre, une *alternative*² est d'invoquer une « gravité modifiée ». Dans l'approche *MOdified Newtonian Dynamics* (MOND), il est stipulé que le principe fondamental de la dynamique, reliant l'accélération gravitationnelle \mathbf{g} à l'accélération inertielle \mathbf{a} , s'écrit en fait :

$$\mathbf{g} = \mathbf{a} \times \mu(a/a_0),$$

où la fonction μ a les propriétés asymptotiques suivantes³,

$$\mu(x) \rightarrow \begin{cases} x & x \ll 1 \\ 1 & x \gg 1 \end{cases}$$

où a_0 est une accélération limite à déterminer.

9. Que se passe-t-il dans les deux régimes extrêmes $a \gg a_0$ et $a \ll a_0$? Lesquels de ces régimes correspondent aux cas dits « newtonien » et « MOND profond »? À quelles parties de la galaxie correspondent-ils?
10. En déduire l'allure de la courbe de rotation dans l'hypothèse MOND dans les deux régimes. Relier la vitesse asymptotique v_∞ de la courbe de rotation à l'accélération limite a_0 et à la masse totale M de la galaxie.

Pour les galaxies spirales, la relation (massique) de Tully-Fisher corrèle la masse M d'une galaxie à sa vitesse asymptotique v_∞ , avec

$$\log M/M_\odot \simeq \alpha \log v_\infty [\text{km s}^{-1}] - \beta.$$

11. Dans le cadre de la théorie MOND, que valent les constantes α et β ? (attention aux unités!) Sachant que $\beta \sim -1,87$, montrer que $a_0 \sim 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$.
12. À quelle distance (en UA) du Soleil (supposé isolé) un corps en rotation circulaire uniforme ressent-il une telle accélération? Conclure.

Données numériques : $M_\odot = 1,9891 \times 10^{30} \text{ kg}$, $G = 6,6741 \times 10^{-11} \text{ SI}$, $1 \text{ UA} = 1,495\,978\,7 \times 10^{11} \text{ m}$.

2.2.3 Exemple de galaxie : la Voie Lactée

Exercice 29 Le centre galactique

La Fig. 2.2 montre l'orbite de l'étoile ayant la plus grande vitesse autour du centre galactique. À partir des caractéristiques de cette orbite (période de $T = 15,2$ ans, et demi grand-axe de $a = 0',119$), retrouver l'estimation de la masse incluse dans ce rayon au centre de notre Galaxie en utilisant la troisième loi de Kepler. On rappelle que nous sommes à environ $R = 8,5$ kpc du centre galactique.

La masse *visible* au centre galactique étant estimée à environ 10^6 masses solaires, en déduire une estimation de la masse centrale invisible de notre Galaxie. Proposer une explication.

2.2.4 Distribution des galaxies dans l'univers

Exercice 30 Relation de Tully-Fisher (examen 2015)

Les observations des galaxies spirales — caractérisées par leur masse \mathcal{M} , leur luminosité totale L et leur rayon caractéristique R — montrent que leur courbe de rotation (vitesse de rotation en fonction de la distance) tend à grande distance vers une valeur limite V_{max} . L'objectif de cet exercice est de comprendre l'origine de la relation de Tully-Fisher (1977, *A new method of determining distances to galaxies*, A&A, **54**, 661), qui exprime la magnitude absolue M des galaxies spirales en fonction de leur vitesse de rotation V_{max} :

$$M = -10 \log V_{\text{max}} + \text{cte}$$

2. Il n'y a plus de halo de matière sombre, seule la matière visible est considérée.
3. La forme précise de μ n'est ici pas importante.

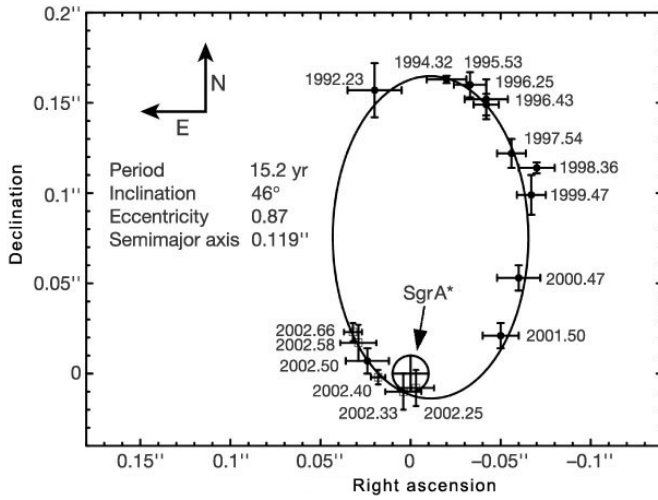


FIGURE 2.2 – Orbite de l'étoile S2 autour du centre galactique SgrA* (Schödel et al. 2002, *A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way*, Nature, **419**, 694).

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou toute expression qui en découle), relier la masse $\mathcal{M}(R)$ interne au rayon R à la vitesse de rotation $V(R)$. En déduire une relation (approchée) entre la masse totale \mathcal{M} et V_{\max} .
2. En supposant que le rapport masse-luminosité $\mathcal{M}/L = \Upsilon$ est le même pour toutes les galaxies spirales et qu'elles ont toutes la même brillance de surface $\sigma = L/(\pi R^2)$, établir que

$$L \propto V_{\max}^4$$

où l'on précisera la constante de proportionnalité.

3. En rappelant la relation entre la luminosité L et la magnitude absolue M , en déduire la relation de Tully-Fisher (TF).

Pour des galaxies de type Sa, on observe que la relation de TF s'exprime par :

$$M_B = -9,95 \log(V_{\max} [\text{km s}^{-1}]) + 3,15. \quad (2.1)$$

La galaxie NGC 2639, de type Sa, possède une vitesse de rotation $V_{\max} = 324 \text{ km s}^{-1}$ (atteinte pour $R = 30 \text{ kpc}$) et une magnitude apparente $B = 11,5 \text{ mag}$.

4. Calculer la magnitude absolue M_B prédite par la relation de TF pour cette galaxie. En déduire, en rappelant l'expression du module de distance, la distance de cette galaxie.
5. Sachant la magnitude absolue $M_{\odot B} = 5,47$, déterminer la luminosité L_B (exprimée en $L_{\odot B}$) de cette galaxie.
6. Calculer la masse contenue dans un rayon $R = 30 \text{ kpc}$. En déduire le rapport $\Upsilon_B = \mathcal{M}/L_B$ (exprimé en $\mathcal{M}_{\odot}/L_{\odot B}$).

Exercice 31 Fonction de luminosité

La fonction de luminosité $\Phi(L)$ des galaxies s'exprime généralement à l'aide de la fonction de Schechter (1976) :

$$\Phi(L) dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) dL/L^*$$

où $\Phi(L)dL$ est le nombre de galaxies de luminosité comprise entre L et $L + dL$ par unité de volume (p.ex. par Mpc^3). Pour les galaxies de champ, on a $\alpha \sim -5/4$, $L_B^* \sim 2 \times 10^{10} L_{\odot}$ et $\Phi^* \sim 5 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$.

1. Quelle est la signification physique de la loi de Schechter ?
2. Exprimer la loi de Schechter en magnitudes absolues.

Exercice 32 Fréquence de collisions dans un amas

On considère un amas de galaxies ayant les caractéristiques suivantes :

- il est supposé sphérique, de diamètre D_a ,
- il contient N_g galaxies identiques et réparties uniformément dans l'amas,
- les galaxies sont supposées animées d'une vitesse *relative* quadratique moyenne v_g (c.-à-d. que la vitesse quadratique moyenne est de $v_g/\sqrt{2}$).

1. Donner l'expression de la densité numérique de galaxies (le nombre par unité de volume) n_g dans l'amas.

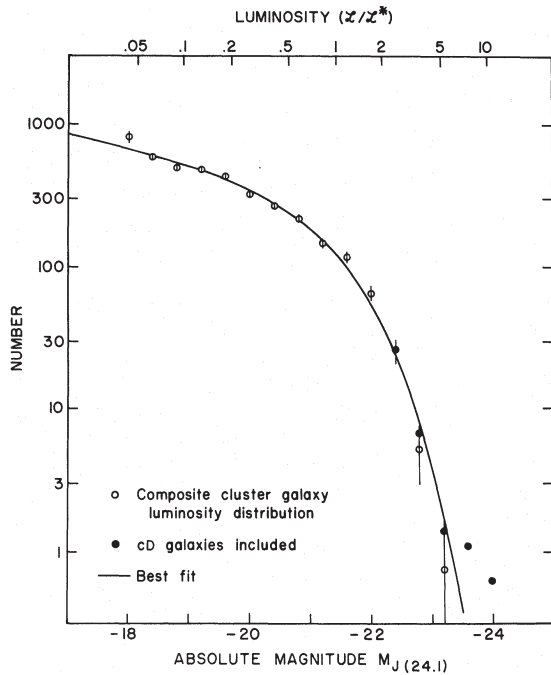


FIGURE 2.3 – Fonction de luminosité des galaxies dans les amas d’Abell (Schechter, 1976, *An analytic expression for the luminosity function for galaxies*, ApJ, **203**, 297).

2. On suppose que les galaxies ont un diamètre typique d_g . En modélisant les galaxies comme des sphères dures (« boules de billard »), donner l’expression de la section efficace S_{eff} lors d’une interaction (collision) entre deux galaxies.
3. Donner l’expression du nombre d’interactions que subit une galaxie de l’amas pendant un temps Δt . En déduire, pour une galaxie, le temps caractéristique de collision τ_c et le libre parcours moyen ℓ_c .
4. En déduire le temps T_c entre deux interactions au sein de l’amas.
5. Application numérique : considérons un amas avec $D_a = 7 \text{ Mpc}$, $N = 850$ galaxies, $d_g = 20 \text{ kpc}$ et $v_g = 650 \text{ km s}^{-1}$. Explicitez le calcul numérique du temps moyen entre deux collisions pour cet amas.

2.2.5 Équilibre gravitationnel

Exercice 33 Théorème du viriel scalaire

On considère le système Terre-Soleil. Le Soleil, de masse M_\odot , est pris comme référence du mouvement ($v_\odot = 0$). On note M_\oplus et v_\oplus la masse et la vitesse de la Terre.

1. Écrire l’expression de l’énergie cinétique du système Terre-Soleil.
2. Énoncer le théorème du viriel. En déduire l’expression de la distance D d’équilibre entre la Terre et le Soleil. Faire l’application numérique, sachant que $M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ et $v_\oplus = 30 \text{ km s}^{-1}$.
3. On considère un système d’étoiles binaires en équilibre. Pour simplifier, les étoiles sont prises de masses égales $M_1 = M_2 = M_\odot$ et leurs vitesses sont considérées comme égales $v_1 = v_2 = v$.

Expliciter la relation entre la distance entre ces deux étoiles et leur vitesse et calculer cette vitesse v pour les distances d’équilibre D suivantes : 1 UA, 10 UA et 100 UA.

Exercice 34 Autres applications du théorème du viriel

On va maintenant utiliser le théorème du viriel pour remplir le tableau ci-dessous, donnant les rayons, masses et vitesses caractéristiques de différents systèmes stellaires.

Système	R	V [km/s]	M/M_\odot
Amas globulaire	10 pc	10	
Galaxie	15 kpc	200	
Amas de galaxies	1 Mpc	1000	

Exercice 35 Temps cinématique

On va maintenant calculer le temps cinématique t_c pour différents systèmes stellaires.

Système	R	M/M_{\odot}	t_c [ans]
Amas ouvert	1 pc	500	
Amas globulaire	10 pc	10^5	
Galaxie	15 kpc	10^{11}	
Amas de galaxies	1 Mpc	10^{14}	

Que remarquez-vous sur ces temps cinématiques pour les différents systèmes ?

Chapitre 3

Cosmologie

3.1 Espace et temps absolus

Exercice 36 La faiblesse de la force de gravitation

Marcel et Naomi ressentent l'un pour l'autre une certaine attirance... Quelle part en revient tout bêtement à la force de gravitation universelle, lorsque leurs centres de gravité respectifs sont distants de 1 m ? Quelle masse m , au même point de la Terre, présente un poids égal à cette force ? Marcel pèse 700 N, et Naomi 580 N. Le rayon de la Terre sera supposé égal à $R_{\oplus} = 6370$ km, et la masse de la Terre est de $M_{\oplus} = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

3.2 La rupture relativiste

3.2.1 Relativité générale

Exercice 37 Équivalence gravité/accélération

Pour la Relativité Générale, gravitation et accélération sont équivalentes, mais cette équivalence n'est que *locale* : aucune expérience de physique ne permet de distinguer les effets de l'une de ceux de l'autre, à *condition* de se limiter à un « petit » domaine spatial.

En reprenant l'expérience de pensée de l'« ascenseur d'Einstein, » pouvez-vous montrer qu'il est en effet facile de distinguer pesanteur et accélération par la fusée si on abandonne la localité.

3.2.2 Les tests

Exercice 38 Le décalage gravitationnel vers le rouge

Une lampe spectrale émettant dans la raie $H\alpha$ ($\lambda_0 = 656,3$ nm) est utilisée pour communiquer à partir d'une capsule en orbite serrée autour d'une étoile à neutrons. Le rayon de l'orbite est $R = 1000$ km, la masse de l'étoile de $M = 1,5 M_{\odot}$. À quelle longueur d'onde λ le vaisseau qui a lancé la capsule, et se tient prudemment à grande distance, doit-il rechercher les signaux ?

Comparer cet effet gravitationnel au décalage par effet Doppler du signal de la sonde en orbite circulaire autour de l'étoile à neutrons.

3.3 Le Big Bang

3.3.1 Film des débuts

Exercice 39 Nucléosynthèse primordiale ou non ?

Les éléments légers H, ^2H , ^3H , ^4He , ^7Li sont nés avec le Big Bang. Mais d'où proviennent tous les autres éléments « lourds », ceux qui entrent dans la composition des objets du quotidien ?

3.3.2 Expansion de l'Univers...

Exercice 40 ... limitée par c ?

Plus une galaxie est éloignée de notre Voie Lactée, plus les astronomes lui trouvent une vitesse d'éloignement élevée. C'est l'expansion de l'Univers. Mais, quand la distance croît sans cesse, elle atteint un moment une valeur d_c telle que :

$$V = H_0 d_c > c$$

Est-ce raisonnable ?

Exercice 41 ... la même partout ?

La radiogalaxie 3C 171¹ est relativement lointaine ; entraînée par l'expansion de l'Univers, elle présente une vitesse de fuite de 63 000 km s⁻¹.

Montrer que malgré cela, l'astronome Pr. Snurp, qui a là-bas découvert l'expansion de l'Univers, comme Hubble l'a fait pour nous, a lui aussi trouvé une loi qui s'écrit :

$$v_0 = X_0 d_0,$$

v_0 étant la vitesse mesurée à partir de 3C 171 pour une galaxie lointaine située à la distance d_0 de 3C 171, et que la constante de Snurp X_0 partage la valeur de H_0 .

Ainsi, d'une planète de 3C 171, comme de la Terre, on observe la même expansion universelle, avec la même géométrie, et le même taux...

3.3.3 Constante de Hubble & Co.

Dans les exercices suivants, on supposera la constante de Hubble égale à $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Exercice 42 Le facteur d'expansion de l'espace

La constant de Hubble H_0 est usuellement exprimée en kilomètres par seconde et par mégaparsec ($\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$). Quelle est la valeur de l'accroissement annuel d'un kilomètre ? Que vaut H_0 en $\text{kpc Gan}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$?

Exercice 43 Temps de Hubble

Calculez le temps de Hubble $t_H = 1/H_0$. Quelle est sa signification physique ? Quelle conclusion pouvez-vous en tirer sur l'âge de l'Univers ?

Exercice 44 Densité critique

Calculer la densité critique $\rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Quelle est sa dimension ? La convertir en nucléons m⁻³ ($m_p \simeq m_n \simeq m_u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$), puis en $M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$. Commenter.

Exercice 45 Âge de l'Univers

À partir de la définition du facteur de Hubble $H(t)$ et de la relation $R \propto t^{2/3}$ entre le facteur d'échelle R et le temps t dans le cas d'un Univers euclidien ($k = 0$) dominé par la matière ($\Omega_M = 1, \Omega_\Lambda = 0$), trouver la relation entre la valeur actuelle H_0 du facteur et l'âge de l'Univers t_0 . Après application numérique, que peut-on conclure ?

3.4 Modèles cosmologiques

Exercice 46 Modèle FLRW (examen 2011)

Dans le cas d'un Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à courbure spatiale nulle ($k = 0$), on a :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit toujours :

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{\dot{R}}{R}. \tag{3.2}$$

1. Que signifient les différents termes – R, Λ, ρ – de l'équation (3.1) ? Quelle est la dimension de \dot{R}/R ? Comment s'appelle cette quantité ?
2. Si l'on considère le fluide parfait dont l'équation d'état – reliant la pression P à la densité ρ – est donnée par $P = w\rho c^2$, que devient l'équation (3.2) ? Vérifier que l'on obtient alors, en notant $\rho(R_0) = \rho_0$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+w)}.$$

3. Dans le cas où $\Lambda = 0$, en déduire que R est régi par une équation différentielle du type :

$$\dot{R} = \alpha R^{-\eta},$$

avec $\eta = (1 + 3w)/2$. Expliciter la valeur de α .

1. La 171e entrée dans le troisième catalogue de radiources établi par l'observatoire de Cambridge.

4. On peut montrer que la solution générale de l'équation différentielle précédente est de la forme :

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma.$$

Déterminer γ en fonction de η , puis de w .

5. Exprimer alors \dot{R}/R en fonction de t .

6. Dans le cas d'un Univers dominé par la matière ($w = 0$), comment est relié l'âge de l'Univers t_0 à la constante de Hubble H_0 ? Même question dans le cas d'un univers dominé par les radiations ($w = 1/3$).

Exercice 47 *Redshift cosmologique*

La radiogalaxie 4C 41.17 montre une raie spectrale intense à 582,2 nm. Cette raie est identifiée comme la raie Lyman α de l'hydrogène. En laboratoire, sur la Terre, la longueur d'onde de cette raie est de 121,5 nm.

1. Quel est le redshift de la radiogalaxie 4C 41.17?
2. Quel était le facteur d'échelle de l'Univers à l'époque où les atomes d'hydrogène de 4C 41.17 émettaient cette raie?
3. À quelle époque t_{em} la radiogalaxie 4C 41.17 a-t-elle émis la lumière que nous recevons aujourd'hui à t_0 ? On supposera un Univers critique dominé par la matière, avec un âge de $t_0 = 13,5 \times 10^9$ ans.

Exercice 48 *Temps de vol, distance, et expansion*

Il y a dix milliards d'années, ce photon que nous recevons aujourd'hui a quitté une lointaine galaxie.

1. Cette galaxie se trouvait-elle à dix milliards d'années-lumière de nous au moment de l'émission?
2. Cette galaxie se trouve-t-elle aujourd'hui à dix milliards d'années-lumière de nous?

Chapitre 4

Retour sur Terre : nos repères dans le ciel

4.1 Se positionner dans le ciel

Exercice 49 Repérage

1. Quelles sont les coordonnées horizontales des quatre points cardinaux ?
2. Peut-on définir les coordonnées horizontales pour un observateur installé au pôle Nord géographique ou au pôle Sud ?
3. Pour quelles valeurs de la hauteur et de la distance zénithale un astre est-il visible, c'est-à-dire au dessus de l'horizon ?

4.2 Mouvement diurne

Exercice 50 Culmination d'un astre

1. Dans quelle direction (cardinale) se trouve un astre au moment de sa culmination en un lieu de latitude $+50^\circ$ selon sa déclinaison ?
2. Même question pour un lieu situé à l'équateur.
3. La hauteur d'un astre varie-t-elle au cours du mouvement diurne au pôle Nord ?

Exercice 51 Mouvement diurne

1. Comment varie l'azimut d'un astre au cours du mouvement diurne, en un lieu de latitude $+50^\circ$? Et aussi -50° de latitude. Sur la Fig. 4.1, on a représenté la situation en un lieu de l'hémisphère Sud (latitude = -50°) ; P est alors en-dessous de l'horizon et P' est au-dessus.
2. Les astres se lèvent-ils du côté de l'Est et se couchent-ils du côté de l'Ouest aussi bien dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud ?
3. Dans quelle direction géographique un astre culmine-t-il en un lieu de latitude -50° ?
4. Le mouvement diurne est-il observé dans le même sens pour un observateur de l'hémisphère Nord ou un observateur de l'hémisphère Sud ?

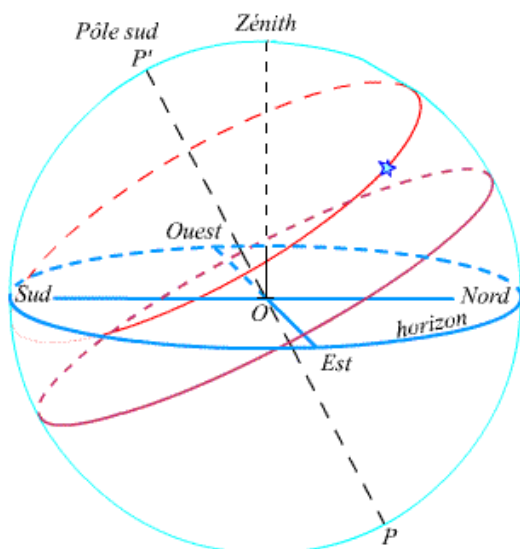


FIGURE 4.1 – Rotation d'une étoile vue de l'hémisphère sud (latitude = -50°).

Exercice 52 Coordonnées horaires

1. Quelle est la relation entre la déclinaison et la distance polaire d'un astre ?
2. Quelles sont les coordonnées horaires des quatre points cardinaux en un lieu de latitude ϕ ?
3. Que vaut la déclinaison du zénith en fonction de la latitude du lieu ?

Exercice 53 Coordonnées équatoriales

1. Une étoile traverse le méridien sud à une hauteur de 85° , et le méridien nord à 45° . Trouver la déclinaison de l'étoile et la latitude de l'observateur.
2. Où ces affirmations sont-elles vraies ?
 - (a) Castor (α -Gem, déclinaison $+31^\circ56'$) est circumpolaire.
 - (b) Bételgeuse (α -Ori, $+7^\circ24'$) culmine au zénith.
 - (c) α -Cen ($-60^\circ46'$) s'élève à une hauteur de 20° au méridien.

4.3 Mouvement du Soleil

4.3.1 Année sidérale, année tropique

Exercice 54 Mouvement du Soleil, jour solaire

1. Que valent la hauteur maximale et la hauteur minimale du Soleil en chacun des lieux considérés : 50° , 75° , 10° ?
2. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil n'ait ni lever ni coucher ?
3. Comment comprendre l'expression « soleil de minuit » ?
4. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil puisse passer à son zénith ?
5. Comment comprendre l'expression « tropique du Cancer » et « tropique du Capricorne » ? on pourra discuter cette question, en particulier, en consultant une carte céleste.