Ondes et Vibrations

IUT, année 2008–09

Exercices, Corrigé sommaire

Jean-Marc Richard et Yann Chapuis

16 mars 2009

I Exercices : rappels mathématiques, oscillations

I.1 Analyse dimensionnelle

Comme $[g] = \mathrm{m.s}^{-2}$, on voit que $[g/l] = \mathrm{s}^{-2}$, soit $T \propto \sqrt{l/g}$ et donc $\alpha = 0$ et $\beta = -\gamma = 1/2$ et donc une période indépendante de la masse. Dans l'équation du mouvement, $m\ell^2\ddot\theta + mg\ell\sin\theta$, où l'on remplace $\sin\theta$ par θ pour de petites oscillations, la masse inerte m du premier terme et la masse gravitationnelle du second se simplifient.

I.2 Équation d'oscillation, conditions limites

i) Si on cherche $x(t) = 2\cos(t-\phi)$, on doit avoir $2\cos\phi = -1$ et $\sin\phi > 0$, ce qui donne $\phi = 2\pi/3$.

ii) Le plus simple est d'écrire $x(t) = -\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\cos(t - 3\pi/4)$

iii) On sait gérer des conditions initiiales à $t = 0$, soit $x(t) = x_0\cos(\omega t) + [v_0/\omega]\sin(\omega t)$ que l'on sait réécrire avec amplitude et phase. Il suffit de décaler l'origine des temps, soit de remplacer t par $t - t_1$, et donc $x(t) = x_1\cos(\omega(t-t_1)) + [v_0/\omega]\sin(\omega(t-t_1))$

iv) on pourra sauter ; on arrive à

$$x(t) = x_0\frac{\sin[\omega(t-t_1)]}{\sin[\omega(t_0-t_1)]} + x_1\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\sin[\omega(t_1-t_0)]},$$

qui ressemble à l'interpolation linéaire de Lagrange pour une fonction $F(x)$ connue en x_0 et en x_1

$$F(x) = F(x_1)\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + F(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

I.3 Amplitude

On peut ici oublier la loi horaire et utiliser l'énergie.

a) En faisant un bilan entre le départ et un point d'élongation maximale, on trouve $m\dot x_0^2/2 + kx_0^2/2 = ka^2/2$ qui donne a, choisi positif.

b) En ce point, $m\dot x_0^2/2 + kx_0^2/2 = m\dot x^2/2 + kx^2/2$. On connaît x^2, on peut donc calculer $\dot x$ au signe près, car la vitesse a la même valeur absolue à l'aller et au retour, à gauche ou à droite.

I.4 Comparaison de deux équations

La première équation correspond à des oscillations, donc à des valeurs finies. On le voit, si par exemple, $x > 0$, alors $\ddot x < 0$, la concavité a tendance à renvoyer la fonction vers la région $x = 0$. Pour la deuxième équation, c'est l'inverse, la concavité accentue les effets. On a un régime explosif. La solution est d'ailleurs $x(t) = a\exp(\omega t) + b\exp(-\omega t)$ qui est infinie à $t \to \infty$ si $a \neq 0$ ou à $t \to -\infty$ si $b \neq 0$.

I. 5 Amplitude et phase

Voir cours.

I. 6 Circuits oscillants

i) On fait un bilan de tension.

ii) On cherche des solutions particulières $w(t) = a\exp(xt)$, que l'on pourra ensuite superposer en utilisant la linéarité de l'équation.

iii) Les cas correspondant au signe du discriminant, donc à deux solutions réelles positives, une racine double réelle ou deux solutions complexes conjuguées pour x. Voir cours. Pour le cas $b)$ la solution de l'équation différentielle est $w(t) = (a + bt)\exp[-Rt/(2L]$, où a et b sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

I. 7 Équations trigonométriques

$x = -\pi/6$ ou $-5\pi/6$. $x = \pm 109.5°$. $x = -18.4° + n\,180°$. Pour la dernière, on peut se ramener à une équation algébrique, par exemple si $t = \tan(x/2)$, $6t + 4(1 - t^2) = 5(1 + t^2)$, soit $9t^2 - 6t + 1 = 0$ qui a une racine double $t = 1/3$, d'où $x \simeq 36.9$. Ou bien on élève au carré $3\sin x = 5 - 4\cos x$ et obtient $16 - 20\cos x + 25\cos^2 x = 0$, qui a une racine double $\cos x = 4/5$, soit $x = \pm 36.9$, dont on lève l'ambiguïté de signe en revenant à l'équation initiale (on a perdu de l'information en élevant au carré). La résolution trigonométrique s'inspire de la manière d'écrire de deux façons la solution d'une équation d'oscillation. En posant $\cos\alpha = 4/5$ et $\sin\alpha = 3/5$, l'équation se réécrit $\cos(x - \alpha) = 1$ et on retrouve le résultat. La méthode graphique, recommandée, consiste à chercher $X = \cos x$ et $Y = \sin x$ et donc dans le plan $\{X, Y\}$, l'intersection du cercle $X^2 + Y^2 = 1$ et de la droite $3Y + 4X = 5$.

I. 8 Représentation par complexes et applications

a) $\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$ et on développe pour retrouver les formules habituelles pour $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ et on développe. D'où $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\,\cos(\theta)\sin^2\theta$, et $\sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\,\sin(\theta)\cos^2\theta$. On généralise avec les coefficients binomiaux.

b) $z = z_0\exp(i\omega t)$, $z = a\exp(i\omega t) + b\exp(-i\omega t)$, qui peut se réarranger en sinus et cosinus. Si on prend des axes tels que $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \omega)$, la partie horizontale de $\mathbf{v}$ tourne, car on vérifie que le complexe $u(t) = v_x + iv_y$ vérifie $\dot{u} = i\omega u$, soit $v_x(t) + iv_y(t) = v_0\exp(i\omega t)$, mais la partie verticale est constante.

Pour une particule dans un champ magnétique, on a $m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, soit le mouvement précédent, avec $\mathbf{\Omega} = -q\mathbf{B}/m$. On trouve aussi une équation de ce type pour le mouvement d'une toupie à l'approximation gyroscopique.

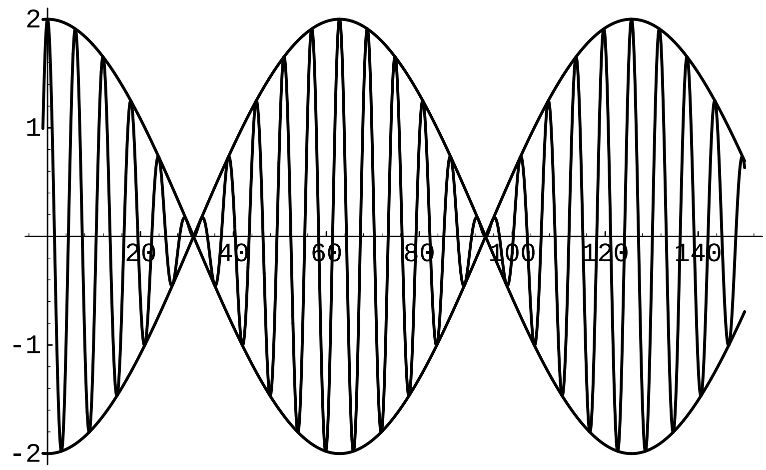

FIGURE 1 – La courbe $\pm 2\cos(0.05t)$ est l'enveloppe de $\cos(t) + \cos(1.1t)$

I. 9 Puissance moyenne

On trouve $\langle P\rangle = I_0 U_0 \cos(\phi)/2 = I_{\text{eff}} U_{\text{eff}} \cos(\phi)$, si on pose $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ et de même pour la tension.

I. 10 Battements

Voir la figure. L'identité $\cos(t) + \cos(1,1t) = 2\cos(0,05t)\cos(1,05t)$ est lue comme une oscillation rapide avec une amplitude lentement variable.

I. 11 Interférences

Un peu de trigonométrie donne $2\cos(\phi/2)$, qui est, dans la construction de Fresnel, la diagonale d'un losange de coté 1 et d'angle ϕ.