Ondes et Vibrations

IUT, année 2008–09

Exercices

Jean-Marc Richard et Yann Chapuis

15 mars 2009

I Exercices : rappels mathématiques, oscillations

I.1 Analyse dimensionnelle

Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m, suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ. On note g l'accélération de la pesanteur. La période T du pendule simple est liée à m, l, et g par la relation suivante : $T = Cm^{\alpha}\,\ell^{\beta}\,g^{\gamma}$, où C est une constante numérique. Déterminer α, β et γ, en effectuant une analyse dimensionnelle.

I.2 Équation d'oscillation, conditions limites

Un oscillateur mécanique n'est pas amorti. Sa pulsation est $\omega = 1$ rad/s. L'équation différentielle régissant le déplacement $x(t)$ est donc $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Expliciter $x(t)$ dans les cas suivants :

i) l'amplitude est $a = 2$ cm et, à l'instant $t = 0$, $x(0) = 1$ cm et la vitesse $\dot{x}$ est positive ;

ii) $x(0) = -1$ cm et $\dot{x}(0) = 1$ cm/s ;

iii) $x(t_1) = x_1$ et $\dot{x}(t_1) = v_1$;

iv) (un peu difficile, facultatif) $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$.

I.3 Amplitude

Un oscillateur non amorti a pour caractériques $m = 1$ kg (masse) et $k = 100$ N/m (raideur). On le lance avec un écart initial $x_0 = 1$ cm et une vitesse $\dot{x} = 2$ cm/s

a) Quelle sera l'amplitude du mouvement ?

b) En un point où $|x(t)| = 0,5$ cm, quelle sera la vitesse ?

I.4 Comparaison de deux équations

Quelles sont les solutions des équations différentielles

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \ddot{x} - \omega^2 x = 0\,?$$

I.5 Amplitude et phase

On considère un oscillateur harmonique de pulsation ?. Le déplacement $x(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$, soit $x(t) = a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$, où a et b sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. On peut également écrire $x(t)$ sous la forme $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$, où x_m est l'amplitude et ϕ la phase à l'origine, dépendant des conditions initiales. Exprimer x_m et ϕ en fonction de x_0 , v_0 et ω.

I. 6 Circuits oscillants

On considère un circuit constitué d'une bobine d'induction L, d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R.

i) Montrer que le régime propre d'un tel circuit est régi par l'équation différentielle

$$L\ddot{w} + R\dot{w} + w/C = 0 \ ,$$

où w représente la charge dans le circuit.

ii) Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre l'équation algébrique

$$Lx^2 + Rx + 1/C = 0 \ .$$

iii) Montrer qu'il existe alors 3 régimes selon la valeur du déterminant de l'équation ; dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle.
a) régime apériodique : $R^2 - 4L/C > 0$
b) régime critique : $R^2 - 4L/C = 0$
c) régime oscillant : $R^2 - 4L/C < 0$.

I. 7 Équations trigonométriques

Résoudre $\sin(x) = -1/2$, $\cos(x) = -1/3$, $\tan(x) = -1/3$ et $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$, en vérifiant la validité des résultats par une méthode graphique.

I. 8 Représentation par complexes et applications

a) Soit $x(t) = \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$. Calculer de deux façons x^2 et en déduire une identité trigonométrique exprimant $\cos(2t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Quel est l'analogue pour $\sin(2t)$? De même, calculer de deux façons x^3 et en déduire une identité trigonométrique exprimant $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Quel est l'analogue pour $\sin(3t)$? Peut-on généraliser à $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$?

b) Résoudre les équations différentielles $\dot{x} = i\omega x(t)$ et $\ddot{x} + \omega^2 x(t) = 0$.

I. 9 Puissance moyenne

La puissance instantanée en alternatif est $P = UI$, avec $I = I_0\cos(\omega t + \phi)$, et $U = U_0\cos(\omega t)$. Calculer la valeur moyenne ($T = 2\pi/\omega$)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.10 Battements

Représenter $\cos(\omega t) + \cos(\omega' t)$ pour ω' voisin de ω, par exemple $\omega = 1$ et $\omega' = 1,1$. Expliquez le résultat au moyen de la représentation de Fresnel.

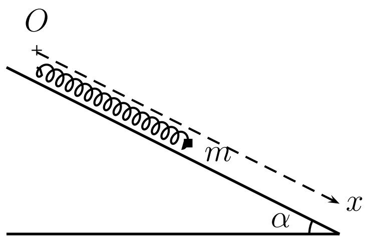
I.11 Interférences

Évaluer l'amplitude du signal $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$ en fonction de ϕ, par le calcul et par la représentation de Fresnel.

II Exercices : oscillateur libre, amorti, forcé

II.1 Oscillateur harmonique libre

Une masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'ensemble est placé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal.



a) Déterminer la position d'équilibre.

b) Écrire l'équation différentielle du mouvement en partant soit du principe fondamental de la dynamique, soit du théorème de l'énergie cinétique. Réécrire cette équation pour la position $x(t)$ par rapport à la position d'équilibre.

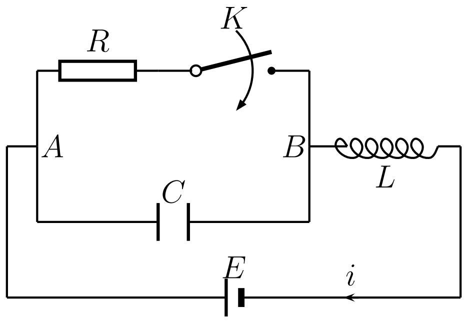
c) Déterminer la période d'oscillation.

d) Quelle est l'expression de $x(t)$ si la masse est lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale à une distance x_0 de la position d'équilibre ?

e) Quelle est l'expression de $x(t)$ si la masse est lâchée à $t = 0$ à une distance x_0 de la position d'équilibre, avec une vitesse v_0 vers le bas ?

II. 2 Oscillateur harmonique libre

On réalise le circuit suivant dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



a) L'interrupteur K étant fermé et le régime permanent établi, déterminer l'intensité $i = I_0$ du courant délivré par le générateur et la tension $U_C = V_A - V_B$ aux bornes du condensateur.

b) À un instant pris comme origine des temps, on ouvre K. Établir la loi de variation temporelle de la tension $U_C(t)$.

c) Calculer la valeur maximale atteinte par U_C et donner sa valeur numérique pour $E = 24$ V, $R = 24\ \Omega$, $L = 10$ H et $C = 100\ \mu$F.

II. 3 Meilleur amortissement visqueux

Les unités sont (kg, cm, s). Un oscillateur linéaire correspond à une masse $m = 1$ et une raideur $k = 1$, et il est soumis à une force d'amortissement visqueux $-\lambda\dot{x}$. On le lance toujours avec $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.

a) Tracer $x(t)$ pour $0 \le t \le 20$ dans les cas $\lambda = 0$, $\lambda = 0,1$ et $\lambda = 0,2$.

b) Que constate-t-on pour la pseudopériode ?

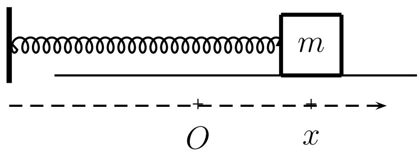
c) Tracer les courbes pour $\lambda = 3$ et $\lambda = 5$.

d) Quel λ donnerait le meilleur amortissement ?

II. 4 Oscillateur avec frottement solide

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur k et peut glisser sur un support horizontal avec un coefficient de frottement solide (rapport entre la composante tangentielle maximale et la composante normale de la réaction) f. On choisit l'origine O telle que le ressort soit au repos. On écarte la masse m de x_0 et on la lâche sans vitesse initiale.

a) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse m. Déterminer la condition sur f pour que la masse se mette en mouvement lorsqu'on la lâche. En supposant cette condition satisfaite, déterminer la variation temporelle de la position $x(t)$ de la masse lorsqu'elle part vers O (sens $<$). On posera $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$.



b) Calculer le temps t_1 et la position x_1 pour lesquels la masse s'arrête et le sens du mouvement s'inverse. Écrire la nouvelle équation différentielle pour $t > t_1$. En déduire $x(t)$ pour $t > t_1$.

c) Cette expression est valable jusqu'au temps t_2 et la position x_2 où la masse s'arrête et repart vers la gauche. Exprimer x_2 en fonction de x_0, f, g et ω_0. En déduire les positions successives x_{2n} et x_{2n+1} où le sens du mouvement s'inverse, en fonction de x_0, f, g, ω_0 et n.

d) Quand la masse va-t-elle s'immobiliser ? Représenter graphiquement l'évolution de x en fonction du temps.

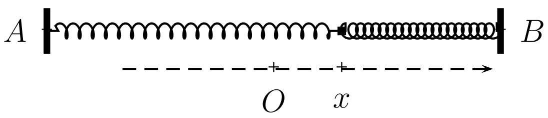
II. 5 Oscillateur forcé

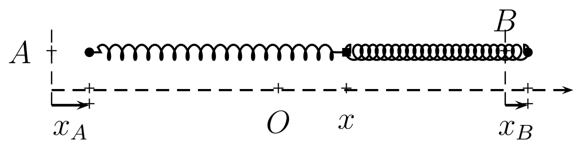
Une masse m est accrochée à deux ressorts de même raideur k, dont les autres extrrémités sont fixées aux points A et B. Lorsque la masse est située en $x = 0$, les deux ressorts sont au repos. On néglige la force de pesanteur et les forces de frottement. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse sans vitesse initiale depuis le point d'abscisse x_0.

a) Représenter sur la figure les forces qui s'exercent sur la masse m.

b) Écrire la loi de Newton pour la masse m. En déduire une équation différentielle vérifiée par x. De quel type d'équation s'agit-il ?

c) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. On notera ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, dont on donnera l'expression en fonction des données.





Les extrémités des ressorts sont maintenant soumises à un mouvement oscillant de pulsation ω. On désigne x_A et x_B les écarts entre les points A et B et ces extrémités, respectivement. On suppose que

$$x_A(t) = a\cos(\omega t)\ , \quad x_B(t) = a\cos(\omega t + \phi)\ .$$

d) Donner l'expression vectorielle des forces qui s'exercent sur la masse.

e) Montrer que x vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a\omega_0^2 \cos(\phi/2)\cos(\omega t + \phi/2)\ ,$$

en utilisant $\cos a + \cos b = 2\cos((a+b)/2)\ \cos((a-b)/2)$.

f) Écrire cette équation différentielle sous forme complexe. Chercher des solutions du type $\underline{x}(t) = \hat{x}\exp(i\omega t)$ et montrer que l'expression de l'amplitude complexe des oscillations de la masse est

$$\hat{x} = \frac{a\omega_0^2\cos(\phi/2)}{\omega_0^2 - \omega^2}\ \exp(i\phi/2)\ ,$$

et en déduire $x(t)$ pour cette solution de pulsation ω.

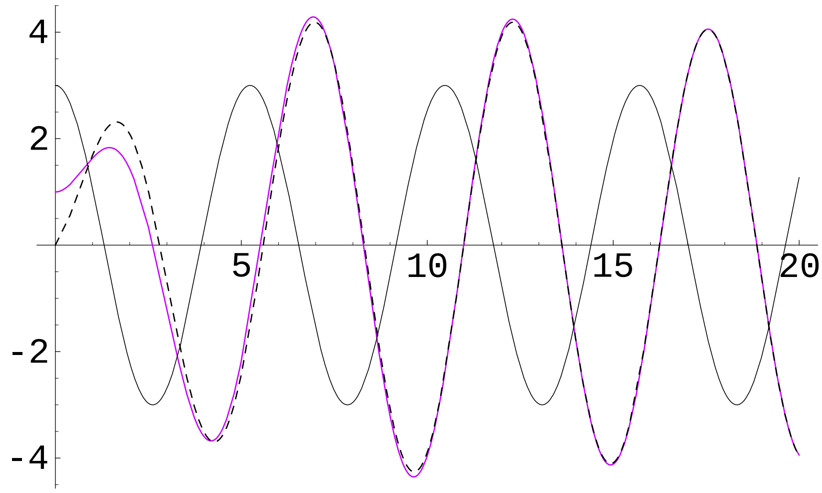
g) Quelles sont les autres solutions de l'équation différentielle ?

II. 6 Oscillateur forcé amorti

Une masse $m = 1$ kg est accrochée à un ressort de raideur k qui lui donne une pulsation de référence $\omega_0 = 1$ rd/s. On ajoute un amortissement visqueux $-\lambda\dot{x}$ avec $\lambda = 0,5$.

a) En quelle unité s'exprime λ ?

Un dispositif magnétique ajoute une force $F_M \cos(\omega t)$, avec $F_M = 3$ N et $\omega = 1,2$ rd/s. Voici la solution pour $x(t)$, d'une part pour $x(0) = 1$ m et $\dot{x}(0) = 0$, d'autre part pour $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 1$ m/s, comparée à l'excitation $F_M \cos(\omega t)$:



b) Commenter ces solutions. Quels résultats du cours retrouve-t-on ?

b) Établir l'expression de $x(t)$ pour t grand et vérifier que cela correspond aux courbes données.

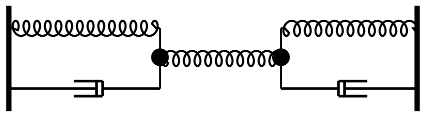
c) Qu'observerait-on en modifiant λ, toutes choses égales par ailleurs ?

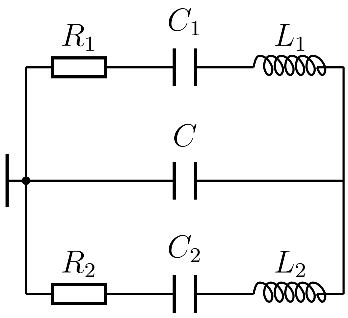
d) En régime permanent, quelle est la puissance moyenne fournie à l'oscillateur par le dispositif magnétique ?

III Exercices : oscillations couplées

III. 1 Couplage capacitif

a) Des masses sont accrochées aux extrémités du ressort central. Introduire des notations et écrire les équations couplées pour le système ci-contre.





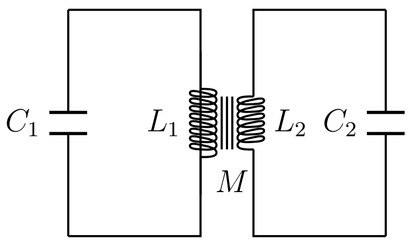
b) Écrire les équations couplées pour les charges q_1 et q_2 des condensateurs C_1 et C_2. Quelles sont les pulsations propres si $L_1 = L_2$, $R_1 = R_2 = 0$ et $C_1 = C_2 = C$? Quelle est la forme de la solution générale ?

III. 2 Couplage résistif

a) On reprend 1.a) en remplaçant le ressort central par un amortisseur. Écrire les équations, sans les résoudre.

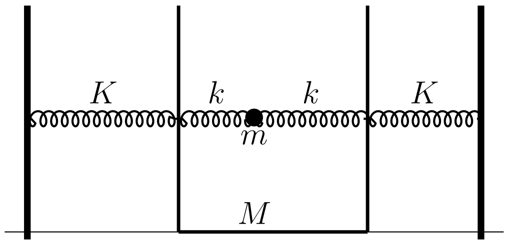
b) On reprend 1.b) en remplaçant le condensateur C par une résistance R. On ne demande pas la résolution explicite des équations.

III. 3 Couplage inertiel



a) Écrire les équations couplées de ce circuit. Noter que le premier circuit reçoit un flux propre $L_1 I_1$ qui s'ajoute au flux MI_2 envoyé par le second circuit. De même, le second reçoit $L_2 I_2 + MI_1$.

b) Le charriot de masse M glisse sans frottement et oscille entre les deux murs, par l'effet des ressorts K. La masse interne m oscille entre les deux ressort k.

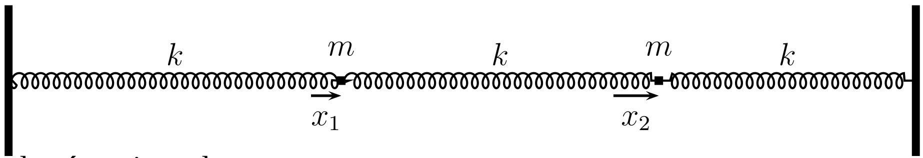


Écrire d'abord les équations quand $M \gg m$. On pourra utiliser la force d'inertie d'entraînement. On notera x le déplacement de m par rapport au charriot et X le déplacement d'ensemble du charriot. Chercher les pulsations propres pour $m = M = 1$ kg et $K = 3k/2$.

Écrire explicitement les solutions si $\omega_0 = (k/m)^{1/2} = 1$ rad/s et si, à $t = 0$,
i) $x(0) = X(0) = 1$ cm et $\dot{x}(0) = \dot{X}(0) = 0$,
ii) $x(0) = X(0) = 0$ cm et $\dot{x}(0) = -\dot{X}(0) = 1$ cm/s.

III. 4 Énergie d'un système couplé

On considère le dispositif



a) Écrire les équations du mouvement.

b) Montrer qu'elles peuvent se recombiner en

$$\begin{aligned}(2m)\left(\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{2}\right)+(2k)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)&=0\ ,\\ \left(\frac{m}{2}\right)(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)+\left(\frac{3k}{2}\right)(x_1-x_2)&=0\ .\end{aligned} \tag{III.1}$$

et interpréter physiquement.

b) Vérifier l'identité

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}kx_2^2+k(x_1-x_2)^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3k}{2}\right)(x_1-x_2)^2\ . \tag{III.2}$$

et donner l'interprétation physique.

c) Décrire *qualitativement* comment évoluerait le système une fois lancé s'il y avait un léger amortissement
– uniquement sur le ressort central,
– uniquement sur les ressorts extérieurs ?

IV Exercices : propagation des ondes

IV. 1 Relation vitesse–fréquence–longueur d'onde

1. Quelle est la vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale issue d'une source de fréquence 120 Hz si sa longueur d'onde est 0.5 m ?

2. La vitesse de propagation d'un son dans l'air est de 340 m/s. Quelle est la longueur d'onde d'un son de fréquence $f = 263$ Hz dans l'air ?

3. La vitesse de propagation d'un son dans l'eau est de 1490 m/s. Quelle est la longueur d'onde du son précédent dans l'eau ?

IV. 2 Amplitude, fréquence ...

Une onde transversale qui se propage sur une corde à pour équation :

$$y = 10\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{50} - 4t\right)\right]$$

ou x et y sont exprimés en cm et t en secondes.

1. Calculer l'amplitude, la fréquence, la vitesse de propagation, la longueur d'onde et le vecteur d'onde.

2. Calculer la vitesse et l'accélération maximum d'un point de la corde.

IV. 3 Vitesse de propagation dépendant de la fréquence

On considère l'onde

$$s(x,t) = \cos(t - x) + 0,5\cos(2t - 2ax)\ ,$$

La représenter pour $x = 0$, $x = 1,3$ et $x = 2,6$ dans les cas $a = 1$ et $a = 1,5$. Interpréter physiquement la différence entre les deux cas.

IV. 4 Composition de deux vibrations

Deux sources distantes de 10 m sont animées de mouvements vibratoires $y_1 = 0.03\sin(\pi t)$ et $y_2 = 0.01\sin(\pi t)$. Les ondes émises se propagent à la vitesse $c = 1.5$ m/s. Quelle est l'équation du mouvement d'un point situé à 6 m de la première source et à 4 m de la seconde ?

IV. 5 Relation temps–espace

Un ébranlement transversal $Y(x,t)$ se déplace avec la vitesse c vers les x positifs. La représentation temporelle de cet ébranlement au point d'abscisse $x = x_0$ est donnée sur la figure **??**. Donner la représentation spatiale de cet ébranlement au temps $t = t_2$.

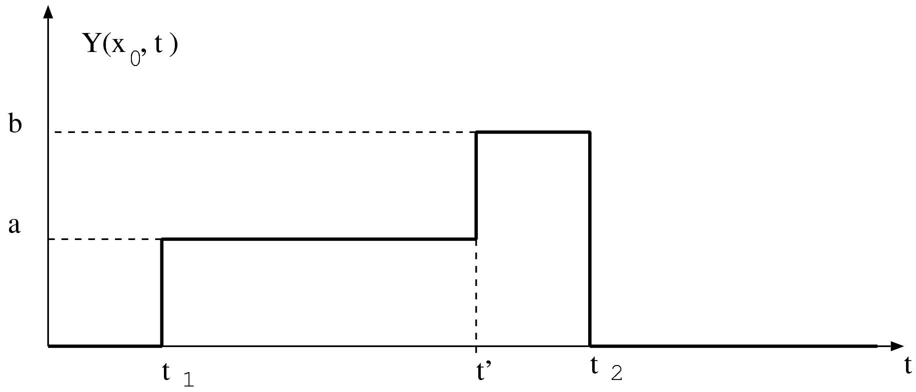


FIGURE 1 –

IV. 6 Onde progressive sur une corde

Une onde transversale $y(x, t)$ se propage avec la vitesse c sur une corde tendue selon l'axe des x.

1. La masse linéique de la corde est μ et sa tension T. Établir, à l'aide d'une équation aux dimensions, la dépendance de la vitesse c par rapport à μ et T. Application numérique : $T = 4$ N ; $\mu = 10^{-2}$ kg/m.

2. Le mouvement de l'extrémité de la corde, en $x = 0$, est donné par $y(0, t) = y_0 \sin(\omega t)$ avec $y_0 = 10$ cm et $\omega = \pi$ rd/s. Calculer la longueur d'onde et donner le déplacement $y(x, t)$ pour $x > 0$.

3. On suppose la corde mise en mouvement à $t = 0$. Tracer le graphe $y(40, t)$ en $x = 40$ m puis représenter la corde à $t = 1$ s, soit $y(x, 1)$.

4. Montrer que l'énergie par unité de longueur s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2$$

En déduire l'expression de la puissance moyenne transportée par l'onde.

IV. 7 Raccordement avec masse ponctuelle

Une corde infinie, à gauche ($x < 0$) a une masse linéique μ_1 et à droite ($x > 0$) μ_2. La soudure est assimilée à une masse ponctuelle m en $x = 0$. On note $\underline{a}_{\text{inc}} \exp[i(\omega t - k_1 x)]$ l'onde incidente, avec la convention habituelle que le déplacement transverse physique en est la partie réelle), $\underline{a}_r \exp[i(\omega t + k_1 x)]$ l'onde réfléchie, $\underline{y}_1(x, t)$, la somme de ces deux termes, la vibration totale sur la partie gauche, et $\underline{y}_2(x, t) = \underline{a}_t \exp[i(\omega t - k_2 x)]$ l'onde transmise.

a) Exprimer k_i en fonction de ω, μ_i et la tension T de la corde.

b) Écrire les conditions de raccordement sur $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$ en $x = 0$.

c) Dans la limite $m = 0$, retrouver les résultats du cours,

$$a_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} a_{\text{inc}} \,, \qquad a_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} a_{\text{inc}} \,.$$

d) Trouver l'expression de $\underline{a}_t$ et $\underline{a}_r$ pour $m > 0$. En déduire le déphasage de l'onde transmise.

IV. 8 Ondes stationnaires sur une corde faite de deux parties différentes

Une corde homogène de masse linéique μ est tendue horizontalement avec une tension T entre deux points A et B, distants de L. On rappelle que l'équation de propagation d'un petit ébranlement vertical $y(x,t)$ est

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \,,$$

avec $c^2 = T/\mu$.

a) On prend d'abord l'origine des abscisses en A. Montrer qu'une solution

$$y(x,t) = \alpha \cos[\omega(t - x/c)] + \beta \cos[\omega(t + x/c)] \,,$$

peut s'annuler en permanence en $x = 0$ sans restreindre le choix de la pulsation ω.

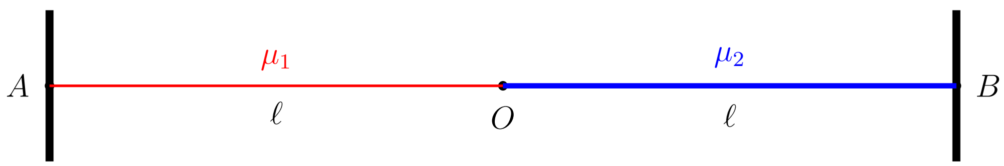
b) Pour quelles valeurs de ω la solution précédente s'annule-t-elle aussi pour $x = L$? Donner un exemple d'application.

c) On suppose désormais que la corde est faite de deux parties de même longueur $\ell = L/2$, mais de caractéristique différentes. On place maintenant l'origine $x = 0$ *au milieu* de la corde. À gauche, pour $x < \ell$, la densité de la corde est μ_1 et correspond à une célérité c_1. À droite, pour $\ell < x < L = 2\ell$, la densité de la corde est μ_2 et correspond à une célérité c_2. Montrer que y_1, qui décrit l'état de la vibration à droite, peut être pris de la forme $y_2 = \alpha_2 \cos(\omega t + \phi) \ \sin[\omega(l - x)]$ pour satisfaire les conditions limites en $x = \ell$.

d) Écrire de même la solution qui à gauche satisfait aux conditions limites en $x = -\ell$.

e) Écrire les conditions de continuité en $x = 0$ pour les fonctions $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ qui décrivent l'état de la vibrations à gauche et à droite respectivement.

f) Montrer que si $\mu_1 = \mu_2$, on retrouve le résultat précédent pour les pulsations propres d'une corde homogène de longueur L et de tension T. Quelles sont les pulsations propres dans le cas où $\mu_2 = 4\mu_1$?



V Association d'ondes, divers

V. 1 Ressort massif

Un ressort massif a une raideur k pour une longueur totale au repos l_0.

a) Montrer que la raideur d'un morceau de longueur au repos $l < l_0$ est $k' = kl_0/l$. Montrer que la tension d'un morceau de longueur au repos l et étiré ou comprimé uniformément de δl est $F = E\delta l/l$, où $E = kl_0$ est le module d'Young.

b) Le ressort, posé sur une table horizontale, est déformé dans le sens longitudinal. Le point d'abscisse au repos x ($0 \leq x \leq l_0$) est déplacé de y, acquérant une nouvelle abscisse $x + y(x,t)$. Montrer que la tension en ce point est $E\partial y/\partial x$.

c) Le ressort a une masse linéique λ, rapport de sa masse à sa longueur au repos l_0. Écrire la loi de la dynamique pour un morceau dont les extrémités ont les abscisses au repos x et $x + dx$. En déduire une équation de propagation du type :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{V.1}$$

et calculer la vitesse de propagation c en fonction des données.

V. 2 Acoustique géométrique

En acoustique, on entend presque aussi bien un bruit extérieur lorsqu'une porte est entrouverte que lorsqu'elle est ouverte. Interpréter qualitativement cette observation par analogie avec les ondes lumineuses, en indiquant si elles relèvent ou non de l'approximation de l'acoustique géométrique, analogue de l'optique géométrique

V. 3 Couche sonore anti-reflet

a) Les impédances caractéristiques des tissus musculaires et de l'air pour les ultrasons valent respectivement : Z_m = 1,7 10^6 kg.m^{-2}.s^{-1} et Z_a = 4,0 10^2 kg.m^{-2}.s^{-1}. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle et commenter.

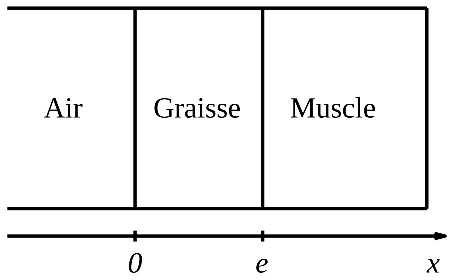
b) Pour supprimer l'onde réfléchie dans l'air, on réalise une couche antireflet d'épaisseur e en graisse, d'impédance Z_a. On note c_a, c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux, et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesses dans les trois milieux de la forme :

$$v = \begin{cases} A_0 \exp(j\omega t - jk_a x) & \text{si} \quad x < 0 \\ A_m \exp(j\omega t - jk_m x) & \text{si} \quad x > e \\ A_g \exp(j\omega t - jk_a x) + B_g \exp(j\omega t + jk_a x) & \text{si} \quad 0 < x < e \end{cases} \tag{V.2}$$

Quelle est la forme correspondante du champ des surpressions dans les trois milieux ? Écrire les conditions aux limites.
On peut montrer (mais on ne le fera pas) que :

$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g - Z_a} = \left(\frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m}\right) \exp(-2jk_g e) \qquad \text{(V.3)}$$

Vérifier la pertinence de cette expression sur un cas particulier. Déterminer les valeurs convenables de e et Z_g.



V. 4 Enceinte acoustique basse-fréquence

Une notice d'installation de chaîne HI-FI indique que l'enceinte destinée à restituer les basses fréquences peut être placée n'importe où car ces ondes sont émises de manière fortement isotrope. Interpréter qualitativement en admettant que chaque élément de surface de l'enceinte émet une ondelette sphérique et en faisant une analogie avec un résultat du cours d'optique.

V. 5 Réflexion et transmission

Une corde vibrante très longue a une masse linéique μ_1 pour $x < 0$ et μ_2 pour $x > 0$. Elle est le siège d'ondes transverses $s(x,t)$. On définit l'impédance $Z_i = T/c_i = \mu_i c_i$ de chaque coté, où $c_i = \sqrt{T/\mu_i}$ est la vitesse de propagation. On posera $\alpha = Z_1/Z_2$. Une onde incidente part de très loin à gauche et arrive vers le raccordement avec une valeur $s_i(x,t)$ qui est la partie réelle de $s_i(x,t) = a_1 \exp[i(\omega t - k_1 x))$.

a) Écrire l'onde réfléchie s_r et l'onde transmise s_i en introduisant les amplitudes complexes respectives b_1 et a_2.

b) Écrire les conditions de raccordement en $x = 0$. En déduire que :

$$a_2 = a_1 \frac{2\alpha}{1+\alpha};\ b_1 = a_1 \frac{\alpha - 1}{1+\alpha} \qquad \text{(V.4)}$$

Quelles sont les phases relatives des différentes ondes en $x = 0$?

c) Montrer que le flux d'énergie apportée par l'onde incidente est $\phi_i = Z_1 a_1^2 \omega^2/2$. Écrire l'analogue ϕ_r et ϕ_t pour les parties réfléchie et transmise. Vérifier la conservation de l'énergie.

V. 6 Onde de choc

Un avion possède une vitesse v supérieure à la vitesse c du son dans l'air qu'il traverse. Sur son passage, il crée des ondes sonores sphériques qui se propagent dans l'air. Montrer à l'aide de considérations géométriques que les ondes interfèrent de matière constructive dans une direction d'émission qui correspond à un angle tel que $\cos\theta = c/v$ par rapport à la vitesse de l'avion. Citer d'autres exemples du même phénomène.

VI Ondes thermiques

VI. 1 Fonte d'un glaçon

Un glaçon est maintenu par de minces tiges de bois au milieu d'un grand récipient qui contient de l'eau dont la température, loin du glaçon, est $t_1 = 20°$C.

a) On suppose que compte tenu de la lenteur de la fonte, un équilibre est obtenu à chaque instant. Faire un bilan de la conduction de la chaleur dans l'eau, entre le rayon $r = R$, où R est le rayon du glaçon, et $r \to \infty$. En déduire que :

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = A \qquad \text{(VI.1)}$$

et indiquer la signification physique de A.

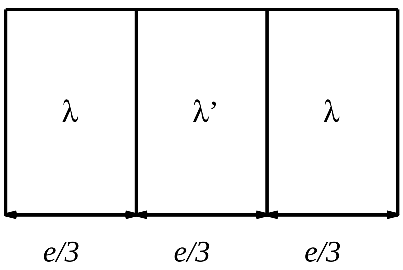
b) Intégrer cette équation et en déduire A en fonction de R, t_1 et t_2 la température à la surface du glaçon.

c) Montrer que l'analogue de (1) à l'intérieur du glaçon ne peut avoir de solution acceptable que si l'on prend $A = 0$ et donc une température constante $T = t_3$.

d) Si L est la température latente de changement d'état, calculer la vitesse d'érosion $\dot{R}$ du glaçon en fonction de A, L et de R, et donc en fonction de R, L, t_1 et t_2.

e) Au bout de combien de temps le glaçon est-il fondu ?

VI. 2 Double vitrage



On définit la résistance thermique R_{th} par : $R_{\mathrm{th}} = e/(\lambda S)$, où e est l'épaisseur du matériau, S sa surface, et λ sa conductivité. On considère le cas d'un double vitrage associant une vitre de surface S, d'épaisseur $e/3$ et de conductivité λ, une épaisseur $e/3$ de gaz peu dense de conductivité λ' et une deuxième vitre identique à la première. Calculer la résistance thermique associée à ce double vitrage, et comparer au cas d'une seule vitre, en prenant $\lambda' = \lambda/100$.

VI. 3 Caves et variations thermiques

On modélise la Terre par un demi-espace $x > 0$ homogène, de conductivité thermique λ, de chaleur massique à volume constant c et de masse volumique μ. Pour rendre compte de l'alternance jour-nuit et de l'alternance des saisons, on modélise la température à la surface de la Terre sous la forme :

$$T(x = 0, t) = T_0 + T_1 \cos(\omega_1 t) + T_2 \cos(\omega_2 t) \qquad \text{(VI.2)}$$

avec $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$ = 1 jour, $\tau_2 = 2\pi/\omega_2$ = 1 an, $T_0 = T_1 = T_2 = 10°$C. On cherche la température $T(x, t)$ dans le sous-sol sous la forme :

$$T(x,t) = T_0 + T_{m1}\exp(-\frac{x}{\delta_1})\cos(\omega_1 t + \phi_1 - \frac{x}{\delta_1}) + T_{m2}\exp(-\frac{x}{\delta_2})\cos(\omega_2 t + \phi_2 - \frac{x}{\delta_2}) \quad \text{(VI.3)}$$

Déterminer les constantes T_{m1}, T_{m2}, ϕ_1 et ϕ_2 en utilisant les conditions aux limites.

En utilisant le fait que $\delta_i = \sqrt{D\tau_i}$ avec $D = \lambda/(\mu c)$, déterminer les valeurs de δ_1 et δ_2. On prendra μ = 2700 kg.m^{-3}, c = 1000 J.kg^{-1}.K^{-1} et λ = 2.7 W.m^{-1}.K^{-1}. Commentaires sur la sensibilité des caves aux variations de température.

VI. 4 Survie dans un igloo

Évaluer l'épaisseur e de glace nécessaire pour que dans un igloo cubique de coté $a = 1$ m, un être humain puisse maintenir par la puissance P = 50 W qu'il dégage une température intérieure $T_1 = +10$°C alors que la température extérieure vaut -10°C. On donne la conductivité de la glace $\lambda = 0.05$ W.K^{-1}.m^{-1}.

VI. 5 Température d'un boule d'uranium

Un boule d'uranium de rayon R est plongée dans un milieu infiniment conducteur qui maintient une température T_1 à la surface, c'est à dire pour $r = R$. Du fait de la radioactivité, une quantité de chaleur ω par unité de temps et de volume est produite dans la sphère, et la température de la sphère se répartit de façon à évacuer cette chaleur. Ecrire un bilan de l'évacuation de la chaleur pour une sphère de rayon $r \leq R$. Montrer que :

$$j(r) = r\omega/3 \quad \text{(VI.4)}$$

et en déduire la température au centre $T(0)$ en combinant cette équation avec la loi de Fourier $j(r) = -\lambda dT/dr$.

VI. 6 Lac gelé

Un lac à fond horizontal à la profondeur H fait la transition entre le sol à la température $t_1 = 10$°C et l'air à la température $t_2 = -10$°C. Soit x l'épaisseur de la couche de glace et donc $H - x$ celle de la couche d'eau. A la transition, on a la température de changement d'état, soit $t_3 = 0$°C. Montrer que l'épaisseur x, ou plus précisément la fraction x/H prise en glace peut se calculer en fonction des températures t_i et du rapport λ_g/λ_e des conductibilités thermiques des deux phases.

Application numérique : calculer x si $H = 10$ m et $\lambda_e = 0,4$, $\lambda_g = 1.6$ W/(m.K).