

Ondes et Vibrations

IUT, année 2008–09

Jean-Marc Richard

Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie

e-mail : Jean-Marc.Richard@lpsc.in2p3.fr

web : <http://lpsc.in2p3.fr/theorie/Richard/Richard.html>

15 mars 2009

Table des matières

1	Introduction	1
2	Oscillateur harmonique	2
2.1	Loi de Hookes	2
2.2	Équation de Newton	2
2.3	Bilan d'énergie	4
2.4	Ressort vertical	5
2.5	Oscillations électriques	6
2.6	Oscillations non harmoniques	6
2.7	Oscillateur spatial	9
3	Oscillations amorties	10
3.1	Analyse qualitative	10
3.2	Équation du mouvement	10
3.3	Circuit R, L, C	13
3.4	Aspects énergétiques	13
4	Oscillations forcées	14
4.1	Introduction	14
4.2	Situation du problème	14
4.3	Cas d'un système amorti	14
4.4	Cas d'un système périodique	15
4.5	Cas d'une excitation sinusoïdale	15
4.6	Résonance	18
4.7	Excitation d'un circuit R, L, C	21
5	Oscillations couplées	23
5.1	Introduction	23
5.2	Oscillation de deux ressorts couplés	23
5.3	Interprétation physique	24
5.4	Battements	25
5.5	Bilan d'énergie	25
5.6	Oscillateurs couplés amortis	26
5.7	Oscillateurs couplés excités	26
5.8	Chaîne d'oscillateurs	27
5.9	Méthode de Laplace pour des oscillateurs couplés	30
6	Ondes à une dimension	31
6.1	Introduction	31
6.2	Définitions	32
6.3	Propagation d'un signal riche	32
6.4	Vitesse de phase, vitesse de groupe	33

7	La corde vibrante	35
7.1	Tension de la corde	35
7.2	Equation du mouvement	35
7.3	Bilan d'énergie	37
7.4	Raccordement	37
7.5	Ondes stationnaires	38
8	Ondes sonores	40
8.1	Introduction	40
8.2	Pression et surpression	40
8.3	Équation de propagation	40
8.4	Raccordement de deux milieux	41
8.5	Considérations énergétiques	41
8.6	Ondes sonores dans les solides	41
9	Ondes thermiques	43
9.1	Introduction	43
9.2	Loi de Fourier–Newton	43
9.3	Régime stationnaire	44
9.4	Régime dépendant du temps	44
9.5	Solutions de l'équation de la chaleur	44
10	Ondes électromagnétiques	46
10.1	Introduction	46
10.2	Équations de Maxwell	46
10.3	Ondes électromagnétiques	47
10.4	Optique géométrique	47
11	Effet Doppler	49
11.1	Introduction	49
11.2	Source en mouvement colinéaire	49
11.3	Détecteur en mouvement colinéaire	49
11.4	Combinaison	50
11.5	Mouvement non colinéaire	50
11.6	Mur du son	50
11.7	Effet Cerenkov	52
12	Superposition de vibrations et d'ondes	53
12.1	Introduction	53
12.2	Combinaison de vibrations de même fréquence	53
12.3	Composition de deux vibrations de fréquences différentes	53
12.4	Interférences	54
12.5	Ondes stationnaires	56
12.6	Diffraction	56

A	Rappels mathématiques	58
A.1	Introduction	58
A.2	Trigonométrie	58
A.3	Nombres complexes	59
A.4	Équations linéaires du second ordre	59
B	Méthode de la transformée de Laplace	62
B.1	Introduction	62
B.2	Définition et propriétés générales	62
B.3	Oscillateur non amorti	62
B.4	Oscillateur amorti	63
B.5	Oscillations forcées	63
B.6	Oscillations couplées	64
B.7	Bilan	64

1 Introduction

Ce cours enchaîne deux parties : les vibrations d'un ou plusieurs oscillateurs, puis la propagation de ces vibrations, ce qui constitue les ondes.

Le premier exemple qui vient à l'esprit est celui de vibrations mécaniques, par exemple les oscillations d'un pendule, et la propagation des ondes acoustiques, longitudinales ou des vibrations, transverses, d'une corde de violon.

Mais les vibrations et ondes se retrouvent dans tous les domaines de physique : circuits électriques oscillants, ondes de chaleur et autres vibrations en thermodynamique, ondes électromagnétiques de diverses fréquences, en particulier dans le domaine optique.

On retrouve les mêmes équations, mais opérant sur des quantités de natures différentes (amplitude mesurée en m, température mesurée en degrés, potentiel exprimé en V, etc.) et avec des pulsations et des vitesses de propagation couvrant une gamme considérable de valeurs.

Des outils mathématiques seront rappelés ou introduits au fur et à mesure des besoins, et sont regroupés dans un appendice.

Nous ne saurions qu'encourager les étudiants à reprendre le cours *la plume à la main*, en suivant pas-à-pas le détail des calculs et en exigeant si nécessaire des explications supplémentaires.

Je remercie les collègues à qui j'ai emprunté quelques unes des figures qui illustrent ce cours, et à l'avance, les étudiants qui me manqueront pas de me signaler les nombreuses coquilles de ce polycopié.

2 Oscillateur harmonique

2.1 Loi de Hookes

Un ressort étiré, dont la longueur passe de ℓ à $\ell + x$ exerce une force pour revenir à sa longueur initiale, proportionnelle à l'allongement algébrique x . Sur un axe orienté le long du ressort

$$f = -kx, \quad (2.1)$$

où k est la raideur du ressort. C'est la loi de Hookes.

On démontre facilement que la raideur équivalente k_s de deux ressorts bout à bout (en série), et celle, k_{\parallel} , de deux ressorts accolés (en parallèle) sont données par

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad k_{\parallel} = k_1 + k_2, \quad (2.2)$$

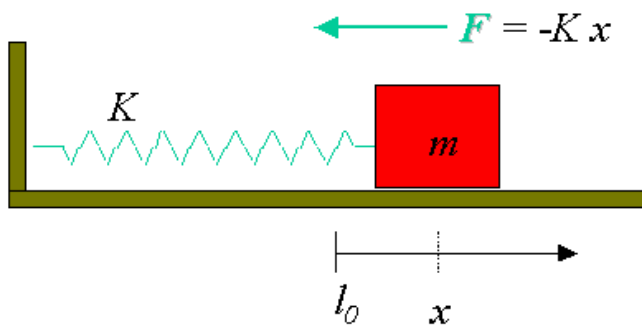
ce que l'on généralise facilement au cas de $N > 2$ ressorts en série ou en parallèle.

La première des relations (2.2) montre que la raideur d'un ressort est inversement proportionnelle à la longueur ℓ , soit

$$k = \frac{A}{\ell}, \quad f = -A \frac{x}{\ell}, \quad (2.3)$$

où A est appelé le *module d'Young*. Avec cette notation, la force exercée par le ressort est proportionnelle à l'allongement *relatif* x/ℓ .

2.2 Équation de Newton



Soit $x = 0$ la position d'équilibre. La loi de Newton, pour une masse m accrochée à l'extrémité du ressort, dont la masse est négligée, s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \\ \omega^2 &= k/m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

FIGURE 1 – Mouvement rectiligne horizontal d'une masse accrochée à un ressort

Comme cela est rappelé dans l'appendice mathématique, cette équation a pour solution une sinusoïde de pulsation ω , ce qui implique deux paramètres, qui sont déterminés par

les conditions initiales. Il y a deux manières d'écrire la solution la plus générale,

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \quad (2.5)$$

La première donne une interprétation physique des quantités A , amplitude du mouvement, et ϕ , phase au temps $t = 0$, tandis que la seconde souligne que les solutions forment un espace vectoriel, et permet plus facilement de mettre en place les conditions initiales. Il faut savoir utiliser l'une ou l'autre de ces notations, et surtout passer de l'une à l'autre.

Pour une particule lancée au temps avec une vitesse v_0 depuis le point d'abscisse x_0 , on trouve

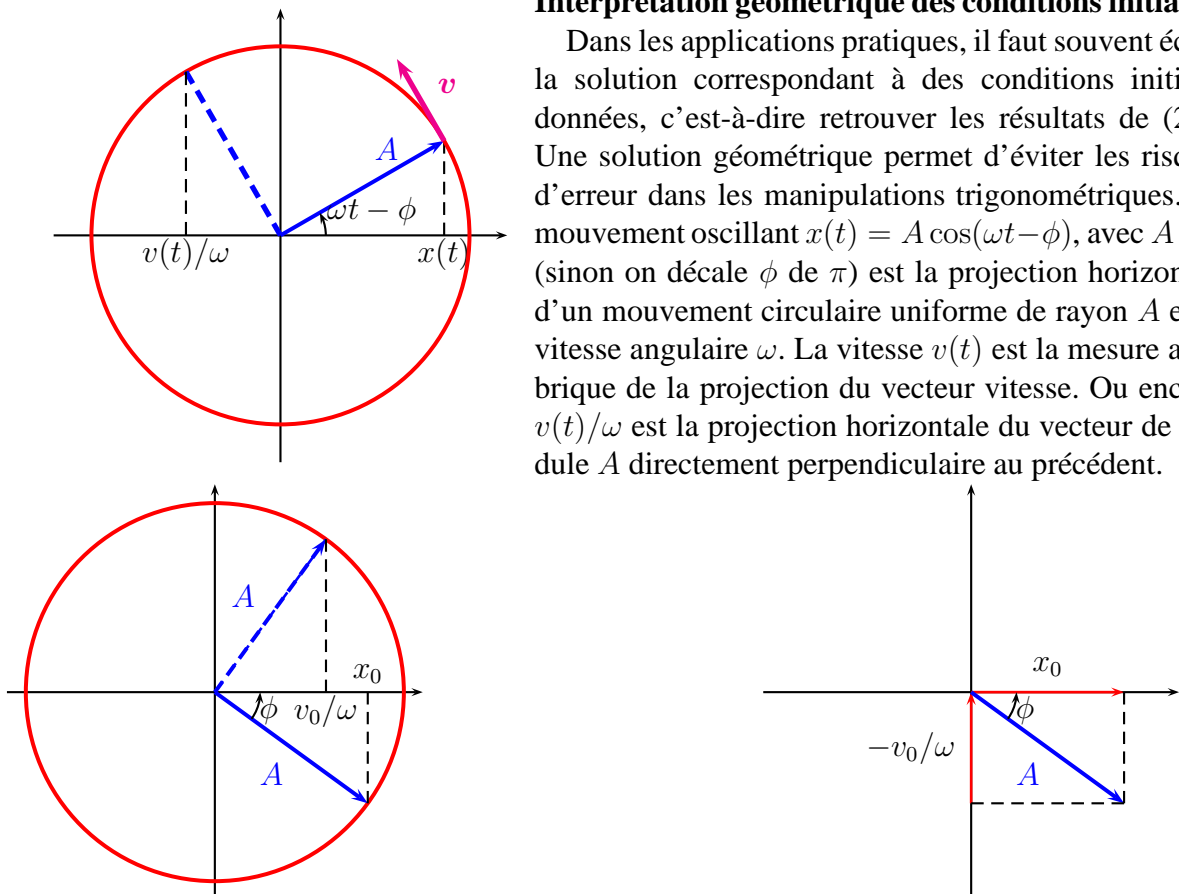
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} \cos(\omega t - \phi),$$

$$\cos \phi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}}, \quad \sin \phi = \frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}}. \quad (2.6)$$

La propriété la plus remarquable de cette solution est que la pulsation est *indépendante de l'amplitude*, d'où l'origine du qualificatif «harmonique» pour ce mouvement.

Interprétation géométrique des conditions initiales :

Dans les applications pratiques, il faut souvent écrire la solution correspondant à des conditions initiales données, c'est-à-dire retrouver les résultats de (2.6). Une solution géométrique permet d'éviter les risques d'erreur dans les manipulations trigonométriques. Un mouvement oscillant $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$, avec $A > 0$ (sinon on décale ϕ de π) est la projection horizontale d'un mouvement circulaire uniforme de rayon A et de vitesse angulaire ω . La vitesse $v(t)$ est la mesure algébrique de la projection du vecteur vitesse. Ou encore, $v(t)/\omega$ est la projection horizontale du vecteur de module A directement perpendiculaire au précédent.



Imaginons maintenant la situation à l'instant $t = 0$. Avec la convention pour définir ϕ , c'est l'angle entre le vecteur tournant et l'axe de référence. On voit que ce vecteur résulte d'une composante horizontale x_0 et d'une composante verticale $-v_0/\omega$. Il suffit d'appliquer les relations des triangles rectangles pour retrouver (2.6).

Méthode de Laplace Pour faire le lien avec le cours d'automatique, on peut résoudre

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2.7)$$

en cherchant sa transformée de Laplace $X(p)$, qui satisfait

$$X(p) [p^2 + \omega^2] = px_0 + \dot{x}_0, \quad (2.8)$$

soit

$$X(p) = x_0 \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (2.9)$$

qui redonne bien (2.6).

2.3 Bilan d'énergie

En principe, on devrait chercher à résoudre le problème du ressort horizontal par une équation différentielle du premier ordre, *a priori* plus simple que l'équation du second ordre fournie par la loi de Newton. Ici, le handicap du second ordre est compensé par la linéarité de l'équation. C'est pourquoi le traitement précédent est le plus familier des cours de physique élémentaire.

Néanmoins, l'approche par l'énergie est essentielle pour la compréhension de la physique, et, nous le verrons dans le cas du pendule, permet une généralisation quand la force de rappel n'est plus exactement proportionnelle au déplacement.

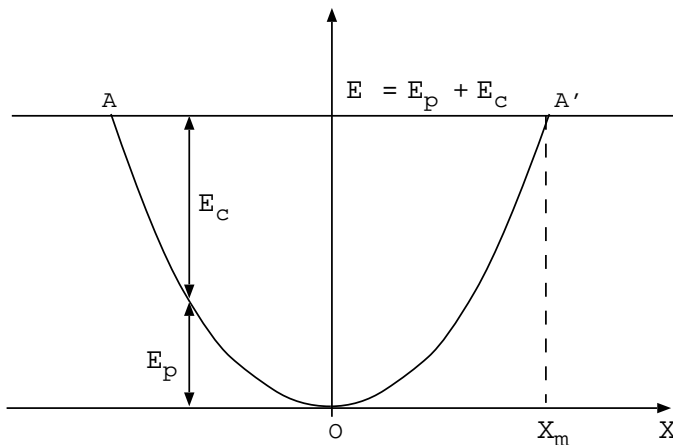


FIGURE 2 – Énergies potentielle et cinétique d'un oscillateur harmonique libre en fonction de l'écart x par rapport à sa position d'équilibre

La force de Hookes (2.1) dérive d'une *énergie potentielle*, à savoir

$$f(x) = -\frac{dE_P(x)}{dx}, \quad (2.10)$$

$$E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

si bien que si E_0 est l'énergie initiale de la masse m , la conservation de l'énergie au cours du mouvement s'exprime par

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0, \quad (2.11)$$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 x_m^2,$$

où l'on a posé $x_m^2 = 2E_0/(m\omega^2)$,

$x_m > 0$ représentant l'amplitude du mouvement.

L'équation (2.11) a un interprétation qualitative simple. Si on trace le graphe de $E_P(x)$, et sur ce graphe la droite horizontale E_0 , le mouvement n'est possible que si $E_P \leq E_0$.

pour respecter la positivité de l'énergie cinétique. La masse oscille donc entre les positions $x = -x_m$ et $x = +x_m$, points où elle s'arrête pour rebrousser chemin.

À partir de (2.11), on retrouve la loi de Newton, par simple dérivation. Mais on peut intégrer directement. L'avantage est que pour une énergie donnée, il n'y a plus qu'une seule constante d'intégration. Prenons un intervalle de temps où le pendule va de gauche à droite, soit $\dot{x} > 0$: on obtient

$$\omega \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x_m^2 - x^2}}, \quad (2.12)$$

qui donne accès non pas à la fonction cherchée $x(t)$, mais à sa fonction *inverse* $t(x)$ dont on connaît la dérivée. On trouve

$$\omega(t - t_0) = \arccos(x/x_m), \quad (2.13)$$

ce qui est équivalent à la solution écrite précédemment, $x(t) = x_m \cos[\omega(t - t_0)]$.

Au cours des oscillations, l'énergie E_0 se partage en proportions variables entre l'énergie potentielle E_P et l'énergie cinétique E_C , avec $E_P + E_C = E_0$. C'est une propriété de tout mouvement sous l'effet d'une force qui dérive d'un potentiel. Ce qui est remarquable, ici, et caractéristique d'une loi de force $f \propto x$, c'est que les valeurs moyennes de ces énergies sont égales, soit

$$\langle E_P \rangle = \langle E_C \rangle = \frac{E_0}{2}, \quad (2.14)$$

ce que l'on démontre en partant de la définition de ces valeurs moyennes sur une *période* $T = 2\pi/\omega$,

$$\langle E_P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} kx(t)^2 dt, \quad (2.15)$$

et l'expression analogue pour $\langle E_C \rangle$.

Cette équipartition, en moyenne, entre les deux formes d'énergie, caractérise les oscillations harmoniques. Pour un satellite en orbite circulaire ou elliptique, qui oscille entre son périégée et son apogée, et pour lequel $E_P(r) = -K/r$, on démontre en mécanique que

$$\langle E_P \rangle = -2\langle E_C \rangle = 2E_0, \quad (2.16)$$

c'est-à-dire des proportions très différentes.

2.4 Ressort vertical

Le seul changement est que le point médian des oscillations ne correspond plus à la longueur à vide du ressort, mais *au point d'équilibre*. On retrouve une situation analogue en électricité quand on provoque des variations sinusoïdales de tension au dessus d'une tension continue.

Si on prend un axe OX issu de l'extrémité ressort à *vide*, écrit la loi de Newton et le cas particulier de la condition d'équilibre,

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= mg - kX, \\ 0 &= mg - kX_{\text{eq}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

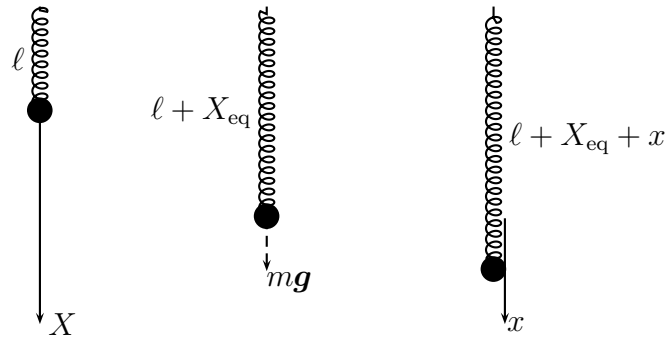


FIGURE 3 – Ressort en apesanteur (gauche), à l'équilibre (centre), et déplacé de l'équilibre (droite)

on obtient par soustraction

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (2.18)$$

ce qui représente des oscillations harmoniques pour la grandeur $x = X - X_{\text{eq}}$ qui mesure l'écart *par rapport à l'équilibre*. Autrement dit, la pulsation reste la même, $\omega = \sqrt{k/m}$, seul le point de fonctionnement est décalé.

2.5 Oscillations électriques

Considérons un circuit C, L comme sur le schéma ci-contre. Le bilan de tension est

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (2.19)$$

sachant que $i = dq/dt$ (un courant i pendant un temps dt apporte une charge $dq = idt$ sur le condensateur), on arrive à

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (2.20)$$

formellement identique à (2.4), avec la correspondance $m \leftrightarrow L$, $k \leftrightarrow C^{-1}$, $x \leftrightarrow q$ et $\dot{x} \leftrightarrow i$. Ce circuit, effectivement, s'il est abandonné avec une charge initiale sur le condensateur, ou une excitation de courant (par induction) sur la bobine, est le siège d'oscillations sinusoïdales

$$q(t) = q_m \cos(\omega t - \phi), \quad \omega = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.21)$$

2.6 Oscillations non harmoniques

Le cas du pendule simple est très connu : le mouvement est approximativement harmonique, avec comme conséquence l'indépendance presque parfaite de la période vis-à-vis de

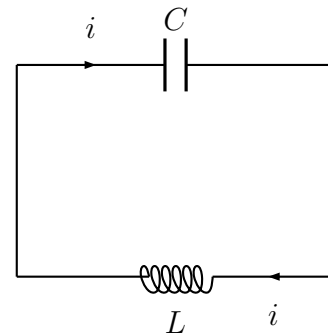


FIGURE 4 – Circuit oscillant C, L

l'amplitude imprimée au mouvement. Nous allons montrer qu'avec la conservation de l'énergie, il est possible d'aller un peu plus loin et d'obtenir une expression exacte de la période qui peut se transformer en une expression approchée donnant, au premier ordre non nul, la légère augmentation de la période avec l'amplitude.

Le pendule simple possède aussi remarquable par ce que la masse disparaît de l'équation. Il n'est pas évident *a priori* qu'une masse de 1 kg et une masse de 10 g, attachées à la même ficelle, oscillent avec la même période !

Nous verrons ensuite des potentiels non quadratiques, pour lesquels la période dépend systématiquement de l'amplitude.

2.6.1 Pendule simple

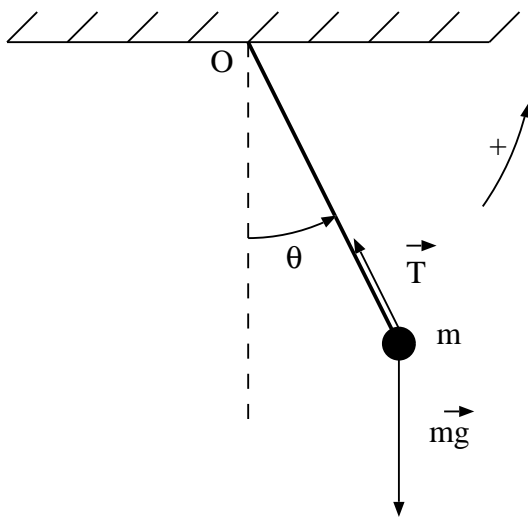


FIGURE 5 – Pendule simple

Un bilan d'énergie pour le pendule simple ci-contre donne

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E_0, \quad (2.22)$$

qui donne par dérivation

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0, \quad (2.23)$$

qui peut être obtenue par bilan des forces ou par le théorème du moment cinétique.

Dans la limite des petites oscillations, $\sin \theta \simeq \theta$ et $1 - \cos \theta \simeq \theta^2/2$, et on retrouve les équations d'un oscillateur harmonique, avec une pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, indépendante de l'amplitude. Il s'agit là d'une *bonne approximation*, car le terme suivant dans les développements précédents sont respectivement en θ^3 et en θ^4 , à cause de la parité des fonctions. Cependant, pour des amplitudes θ_m assez grandes, la pulsation se met à dépendre de l'amplitude.

Pour évaluer exactement la pulsation ω et la période $T = 2\pi/\omega$ correspondante, on réécrit le bilan d'énergie

$$\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2(1 - \cos \theta) = 2\omega_0^2(1 - \cos \theta_m), \quad (2.24)$$

et sur une demi-période où $\dot{\theta} > 0$, on obtient

$$\omega_0 \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}}, \quad (2.25)$$

et donc une période T telle que

$$\omega_0 \frac{T}{2} = \int_{-\theta_m}^{+\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}} = \frac{1}{2} \int_{-\theta_m}^{+\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_m/2) - \sin^2(\theta/2)}}, \quad (2.26)$$

expressions qui ne se prêtent pas trop facilement à l'évaluation numérique ou à des approximations, car il s'agit d'intégrales généralisées dont l'intégrand diverge aux extrémités.

En introduisant le changement de variable $\sin(\theta/2) = \sin \phi \sin(\theta_m/2)$, on arrive après quelques manipulations à

$$\omega_0 \frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2(\theta_m/2)}}, \quad (2.27)$$

qui fait apparaître ce que les mathématiciens appellent une fonction elliptique. L'avantage de cette formulation est que l'intégrale est régulière et se prête à des approximations et des développements en série. L'approximation des petites oscillations consiste à remplacer le dénominateur par 1, d'où $T = T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Si on prend aussi le second terme du développement $1/\sqrt{1-u} = 1 + u/2 + \dots$, on trouve la formule assez connue

$$T = T_0 \left[1 + \frac{\theta_m^2}{16} + \dots \right], \quad (2.28)$$

qui donne par exemple une augmentation de période de seulement 1,7% entre $\theta \rightarrow 0$ et $\theta = \pi/6$.

2.6.2 Potentiels en puissance

On peut imaginer des changements plus radicaux, même s'ils ne sont pas fréquemment réalisés dans la nature. Par exemple, que devient la période si on remplace le potentiel harmonique $kx^2/2$ par $k|x|^n/2$, où n est un nombre positif ?

Par la même démarche que ci-dessus, le bilan d'énergie

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}|x|^n = E_0 = \frac{k}{2}x_m^n, \quad (2.29)$$

indique un mouvement périodique (mais pas sinusoidal !) entre $-x_m$ et $+x_m$. On calcule la demi-période comme le temps nécessaire pour aller d'un extrême à l'autre,

$$\frac{T}{2} = \int_{-x_m}^{+x_m} \frac{dx}{\sqrt{K(x_m^n - |x|^n)}}. \quad (2.30)$$

La valeur exacte de cette intégrale n'est pas sans intérêt, mais le plus important est de produire la dépendance vis-à-vis de l'amplitude x_m , grâce à

$$T = 4x_m^{1-n/2} K^{-1/2} \int_0^1 \frac{du}{1-u^n}, \quad (2.31)$$

résultant du changement de variable $x = x_m u$. Si $n < 2$, la période est une fonction croissante de l'amplitude. Pour $n > 2$, elle devient *décroissante* : la masse met moins de temps à osciller entre $-2a$ et $+2a$ qu'entre $-a$ et $+a$. Comment est-ce possible ? Considérons le quart de période, temps pour aller de l'extrémité au point médian $x = 0$. Lâchons une particule de $+a$, et une autre de $+2a$, en même temps. La deuxième particule prend tellement d'élan qu'elle gagne beaucoup de temps sur le dernier tronçon, rattrape et double la première !

2.7 Oscillateur spatial

Revenons à un potentiel harmonique, avec un ressort de longueur à vide négligeable, mais autorisons des mouvements dans toutes les directions, ce qui correspond à l'expression vectorielle de la loi de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} . \quad (2.32)$$

Les résultats généraux des mouvements à force centrale s'appliquent : moment cinétique conservé, mouvement plan, loi des aires.

Cependant, il n'est pas recommandé d'utiliser des coordonnées polaires pour ce mouvement, comme on le fait pour le cas des forces coulombiennes ou gravitationnelles. Dans le plan du mouvement, avec des axes orthonormés avec l'origine au centre de force,

$$m\ddot{x} + kx = 0 , \quad m\ddot{y} + ky = 0 , \quad (2.33)$$

ce qui donne un mouvement sinusoïdal de *même période* sur chaque axe

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) , \quad y(t) = b \cos(\omega t + \beta) , \quad (2.34)$$

soit une ellipse de centre O . Le fait que $x(t)$ et $y(t)$ reprennent leur valeur initiale après le *même* laps de temps assure une courbe fermée quelques soient les conditions de lancement. C'est une situation exceptionnelle : Bertrand a montré que seules les interactions centrales coulombienne ($E_P \propto -1/r$) et harmonique ($E_P \propto r^2$) donnent des trajectoires d'états liés qui se referment toujours sur elles-mêmes. Pour les autres forces centrales, on n'obtient une trajectoire fermée que pour des valeurs particulières de la vitesse initiale.

Un cas particulier correspond à lancer la particule du point $(a, 0)$ avec une vitesse perpendiculaire $(0, v_0)$, ce qui donne une ellipse

$$x(t) = a \cos(\omega t) , \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) . \quad (2.35)$$

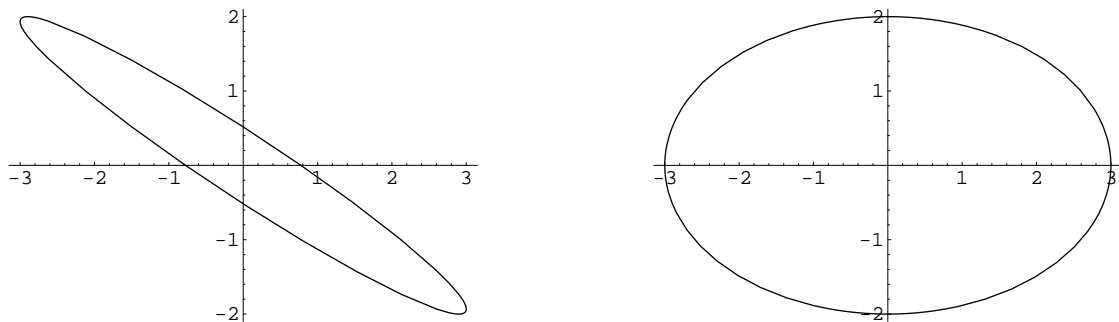


FIGURE 6 – Oscillateur spatial, avec différentes conditions initiales

3 Oscillations amorties

3.1 Analyse qualitative

Le chapitre précédent mettait en jeu des oscillateurs idéaux dont l'énergie visible est strictement conservée, et dont le mouvement se poursuit éternellement. En pratique, les rouages les mieux huilés ne peuvent empêcher quelques frottements : il y a amortissement, et l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. On observe un mouvement dit «pseudo-périodique», voir figure gauche.

Si on augmente l'amortissement, ce qui est recherché par exemple pour la suspension des véhicules, on observe au-delà d'un réglage critique un changement de comportement : la solution ne présente plus d'oscillations, et la masse revient rapidement vers son point d'équilibre, voir figure droite.

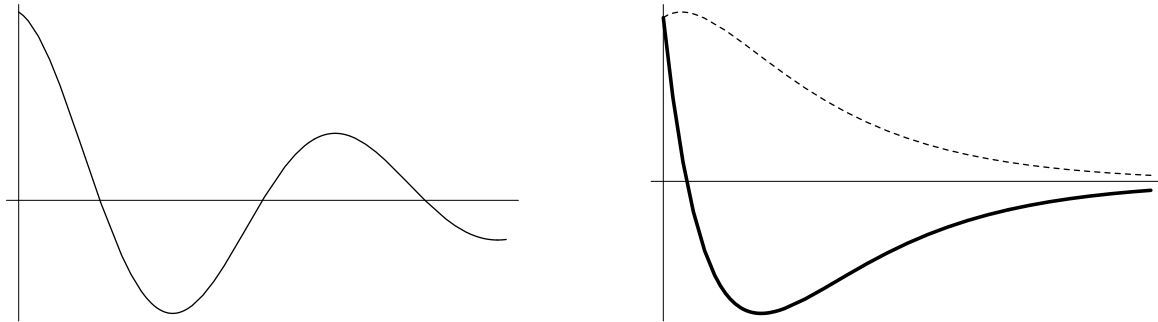


FIGURE 7 – Allure de la solution $x(t)$ en régime d'amortissement faible (gauche) ou fort (droite) avec deux jeux de conditions initiales

3.2 Équation du mouvement

On représente empiriquement l'effet du frottement par une force proportionnelle à la vitesse, $-\lambda\dot{x}$. C'est une bonne description dans le régime des faibles vitesses. Au-delà, la force devient progressivement proportionnelle au carré de la vitesse.

Avec ce terme supplémentaire, la loi de Newton devient, pour un ressort horizontal avec origine au point de repos

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}, \quad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.1)$$

en posant $\lambda = 2m\alpha$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la pulsation en absence de frottement.

Des détails sont donnés en appendice sur la résolution de cette équation. L'idée est de chercher des solutions *exponentielles*

$$x(t) = a_1 \exp(r_1 t) + a_2 \exp(r_2 t), \quad (3.2)$$

avec $r_1 = -r_2 = i\omega_0$ en l'absence d'amortissement^a, avec $\{r_1, r_2\} = -r \pm i\omega$ pour un amortissement faible^a, r_1 et r_2 réels négatifs pour un amortissement fort. On voit que (3.2) utilise la linéarité de l'équation : si on connaît deux solutions indépendantes, la solution la plus générale de l'équation homogène (3.1) est une combinaison linéaire de ces deux solutions.

Pour trouver deux solutions de base, la méthode consiste à chercher $x(t) \propto \exp(rt)$, en permettant à r d'être éventuellement complexe. Ce qui donne l'équation dite *caractéristique*

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0, \quad (3.3)$$

qui selon les valeurs du discriminant (réduit) $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$ distingue trois cas.

3.2.1 Amortissement faible

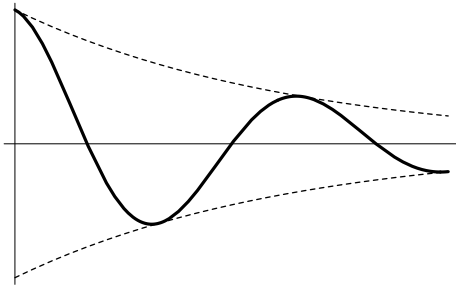


FIGURE 8 – Abscisse $x(t)$ pour un oscillateur amorti et son enveloppe $\pm A \exp(-\alpha t)$

Pour $\alpha < \omega_0$, l'équation caractéristique a deux racines $r = -\alpha \pm i\omega$, avec une partie réelle *négative* et une partie imaginaire $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, ce qui donne une solution

$$x(t) = A \exp(-\alpha t) \cos(\omega t - \phi), \quad (3.4)$$

où A et ϕ dépendent des conditions initiales. La courbe est comprise entre les exponentielles $\pm A \exp(-\alpha t)$ et les touche régulièrement. Entre deux oscillations, il se passe un temps $T = 2\pi/\omega$ (pseudo-période) et l'amplitude décroît de $\exp(-2\pi\alpha/\omega)$. On pose parfois $x_n/x_{n+1} = \exp \delta$, avec $\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi\alpha/\omega$ nommé « décrétement logarithmique ».

On peut noter que $\omega = \omega_0[1 - \alpha^2/(2\omega_0^2) + \dots]$ est du second ordre en α , soit $\omega \simeq \omega_0$ pour α petit. Autrement dit, si une horloge comtoise est un peu grippée, il faudra la remonter plus souvent (l'amortissement est du premier ordre en α), mais elle ne retardera pas beaucoup.

3.2.2 Amortissement fort

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles négatives^b à l'équation caractéristique, et la loi horaire est du type

$$x(t) = a_1 \exp(r_1 t) + a_2 \exp(r_2 t). \quad (3.5)$$

et pour des conditions initiales standard,

$$a_1 = \frac{\dot{x}_0 - r_2 x_0}{r_1 - r_2}, \quad a_2 = \frac{\dot{x}_0 - r_1 x_0}{r_2 - r_1} \quad (3.6)$$

a. Les coefficients a_1 et a_2 , qui dépendent des conditions initiales, seront complexes conjugués pour assurer que $x(t)$ soit réel.

b. Il est impossible à un polynôme à coefficients tous positifs d'avoir une racine positive !

3.2.3 Amortissement critique

C'est un peu une curiosité mathématique, car en physique, il n'y a jamais égalité parfaite entre deux grandeurs. Considérons néanmoins le cas $\alpha = \omega_0$. L'équation caractéristique a une racine double, $r = -\omega_0$, et donc $\exp(-\omega_0 t)$ est une première solution. Une autre est $t \exp(-\omega_0 t)$ ^c

À partir de conditions initiales à $t = 0$, le mouvement sera donc

$$x(t) = x_0 \exp(-\omega_0 t) + (\dot{x}_0 + \omega_0 x_0) t \exp(-\omega_0 t). \quad (3.7)$$

On dit parfois que pour une fréquence propre ω_0 donnée, le retour au repos s'effectue le plus rapidement en régime d'amortissement critique, et non pas, paradoxalement, en régime d'amortissement très fort. En effet, le produit des racines, $r_1 r_2 = \omega_0^2$ est fixé dans notre hypothèse. Si $r_1 \neq r_2$, on peut choisir la numérotation $0 < -r_1 < \omega_0 < -r_2$, et sauf conditions initiales très particulières, $x(t)$ aura une composante à décroissance lente proportionnelle à $\exp(r_1 t)$, tandis qu'en régime critique, $x(t)$ décroît en $\exp(-\omega_0 t)$. Les suspensions des véhicules sont réglées au voisinage du cas critique, et, selon la charge et l'usure des amortisseurs, on passe d'un régime un peu dur à un régime d'oscillations. (Si $m \nearrow$, $\omega_0 \searrow$ comme $1/\sqrt{m}$ tandis que $\alpha \nearrow$ plus vite, en $1/m$, et on passe donc du cas $\alpha = \omega_0$ au cas $\alpha < \omega_0$.)

3.2.4 Méthode de la transformée de Laplace

L'équation (3.1) et ses conditions initiales correspondent à une transformée de Laplace

$$X(p) = \frac{px_0 + \dot{x}_0 + 2\alpha x_0}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} = \frac{\dot{x}_0 + 2\alpha x_0 + r_1 x_0}{(r_1 - r_2)(p - r_1)} + \{r_1 \leftrightarrow r_2\}, \quad (3.8)$$

si on se place dans le cas de couplage fort et écrit $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = (p - r_1)(p - r_2)$. On trouve donc la solution avec l'ajustement des conditions initiales, sous la forme

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0 + 2\alpha x_0 + r_1 x_0}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) + \{r_1 \leftrightarrow r_2\}. \quad (3.9)$$

Si on est en régime de faible amortissement, l'expression ci-dessus est formellement valable, mais il faudra la transformer en $A \exp(-\alpha t) \cos(\omega t + \phi)$ pour lui donner une allure plus physique.

On voit que l'équation caractéristique en r de la méthode élémentaire se retrouve à l'identique, comme équation en p qu'il faut factoriser pour développer la transformée de Laplace en éléments simple, condition pour trouver la transformée inverse.

c. On peut le comprendre ainsi. Dans le cas de deux solutions différentes, on peut prendre la base $\{\exp(r_1 t), \exp(r_2 t)\}$, ou si l'on veut $[\exp(r_1 t) + \exp(r_2 t)]/2$ et $[\exp(r_2 t) - \exp(r_1 t)]/(r_2 - r_1)$, qui tendent vers $\exp(rt)$ et $t \exp(rt)$, respectivement, quand r_1 et $r_2 \rightarrow r$.

3.3 Circuit R, L, C

Considérons un circuit R, C, L comme sur le schéma ci-contre. Le bilan de tension est

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad (3.10)$$

et comme $i = dq/dt$,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad (3.11)$$

formellement identique à l'équation mécanique précédente, si on ajoute $\lambda \leftrightarrow R$ à la liste des correspondances.

On aura des oscillations amorties pour une résistance faible, et une décroissance exponentielle pour une résistance élevée, résultats bien connus des cours d'électrocinétique.

La transition se fait pour la valeur dite « critique »

$$R_{cr} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.12)$$

3.4 Aspects énergétiques

Restons dans le domaine électrique, les considérations qui suivent se traduisent aisément pour un oscillateur mécanique amorti.

Imaginons que le circuit ait une énergie E_0 initiale, somme de l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur, et de l'énergie magnétique dans la bobine, soit

$$E_0 = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{L\dot{q}_0^2}{2}. \quad (3.13)$$

Pendant un temps dt , la résistance dissipe par effet Joule une énergie $R\dot{q}^2 dt$ et le bilan s'établit ainsi

$$d \left[\frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2} \right] + R\dot{q}^2 dt = 0, \quad (3.14)$$

qui, par dérivation, permet de retrouver l'équation (3.10).

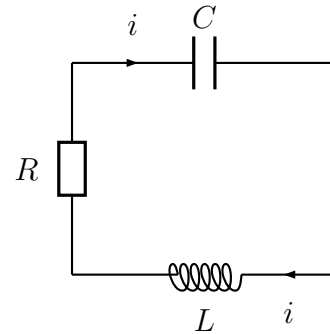


FIGURE 9 – Circuit oscillant R, L, C

4 Oscillations forcées

4.1 Introduction

C'est un chapitre important, avec beaucoup d'applications : réponse d'un véhicule aux cahots de la route, excitation d'un circuit par un générateur BF, etc. , et surtout le concept de résonance : à certaines fréquences, le système répond avec une amplitude très grande à la sollicitation extérieure.

Certains exemples de résonance sont célèbres : ponts s'écroulant sous une troupe marchant au pas cadencé, cantatrice brisant par sa voix un verre de cristal, moine malingre faisant mieux sonner les cloches qu'un lutteur de foire qui tire sur la corde trop frénétiquement, manifestants renversant des voitures qu'ils agitent verticalement à un rythme approprié, etc.

4.2 Situation du problème

Nous reprenons un oscillateur horizontal et imaginons qu'une force supplémentaire $f(t)$ s'exerce sur la masse. En rapatriant à gauche les forces de rappel et de frottement, la loi de Newton devient

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f(t), \quad \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = g(t), \quad (4.1)$$

en posant $G(t) = F(t)/m$, qui a les dimensions d'une accélération.

Pour une telle équation^d, les solutions sont de la forme (voir appendice)

$$x(t) = x_p(t) + [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)], \quad (4.2)$$

où le crochet représente la solution la plus générale de l'équation homogène associée à (4.1), avec deux constantes arbitraires à évaluer d'après les conditions initiales, et x_p est une^e solution particulière.

4.3 Cas d'un système amorti

Par rapport au problème mathématique d'une équation linéaire avec second membre, nous avons ici un système avec $\alpha > 0$, amorti, et les solutions de l'équation homogène décroissent exponentiellement quand $t \rightarrow +\infty$, avec ou sans oscillations.

Il en résulte que si on recommence l'expérience avec la même excitation $F(t)$ mais des conditions initiales différentes, le système aura, pour t grand, la même réponse $x(t)$. Nous observons une *universalité* du mouvement induit quand $t \rightarrow \infty$, ou si l'on veut, une perte de la mémoire des conditions initiales.

d. Certains résultats ci-dessous resteraient valables pour une équation à coefficients non constants, pourvu qu'elle restât linéaire.

e. Ne pas dire *la* solution particulière, à moins que quelque chose ne la caractérise (forme polynomiale, fonction périodique, etc.)

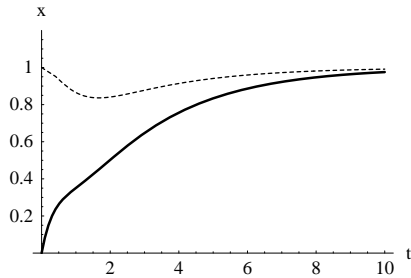


FIGURE 10 – Deux solutions de l'équation $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = th t$, l'une avec déplacement initial sans vitesse (pointillés), l'autre avec vitesse initiale sans déplacement

Preuve : Voir appendice. Si $x^{(1)}(t)$ et $x^{(2)}(t)$ sont deux solutions avec le même $F(t)$ et des conditions initiales différentes, $x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)$ est solution de l'équation homogène et décroît exponentiellement. CQFD.

Précaution. La linéarité est essentielle ici. Pour des systèmes non linéaires, on observe souvent une légère dépendance du comportement asymptotique vis-à-vis des conditions initiales, et parfois une sensibilité pathologique (une infime variation des CI entraîne un changement qualitatif du comportement). C'est la théorie du *chaos déterministe*, pour lequel il existe des livres d'introduction très abordables.

4.4 Cas d'un système périodique

Il n'est pas nécessaire de brûler les étapes et de se précipiter sur les seconds membres sinusoïdaux, même si ce sont les exemples les plus souvent abordés.

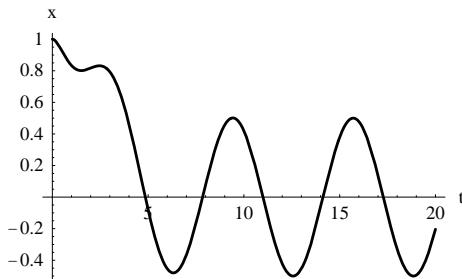


FIGURE 11 – Solution de $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = \sin t$, avec $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$: la solution devient progressivement périodique

Le résultat est le suivant. Si $f(t)$ est périodique, de période^f T , alors la réponse universelle asymptotique est également périodique, de même période T .

Preuve : on considère $x(t)$ et $x(t + T)$, la différence satisfait l'équation homogène et donc décroît exponentiellement. CQFD.

Langage. Dans le cas où $F(t)$ est périodique, on a coutume de parler de la solution périodique comme du *régime permanent*, et du crochet dans (4.2) comme du terme de *régime transitoire*.

4.5 Cas d'une excitation sinusoïdale

Avec les coefficients constants de l'équation (4.2) si le membre de droite est sinusoïdal, la solution de régime permanent est elle aussi sinusoïdale. On vérifie en effet que $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$ est solution de

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = g_m \cos(\omega t), \tag{4.3}$$

si on choisit correctement x_m et ϕ .

f. Une période est un nombre positif τ tel que $f(t + \tau) = f(t) \forall t$. La période est le plus petit de ces nombres. Les autres sont des multiples.

Le calcul explicite de x_m et ϕ peut se faire en reportant l'expression de $x(t)$ et en identifiant, mais c'est un peu laborieux. Deux méthodes plus puissantes sont à notre disposition, le diagramme de Fresnel et la méthode des complexes, qui en fait sont assez complémentaires.

4.5.1 Diagramme de Fresnel

La quantité $u(t) = a \cos(\omega t)$, $a > 0$ est la projection horizontale d'un vecteur tournant de longueur a et d'angle ωt par rapport à l'horizontale. Il faut remarquer que $u'(t)$ a une longueur multipliée par ω et une phase augmentée de $\pi/2$, car

$$[\cos(\omega t)]' = \omega \cos(\omega t + \pi/2), \quad (4.4)$$

Autrement dit, la dérivée première est représentée par un vecteur directement perpendiculaire et de longueur multipliée par ω , la dérivée seconde par un vecteur opposé et de longueur multipliée par ω^2 , etc.

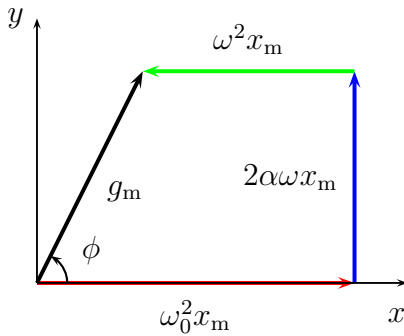


FIGURE 12 – Diagramme de Fresnel pour un oscillateur excité par une force sinusoïdale

L'équation (4.3) a l'interprétation géométrique suivante, si on recherche la solution sinusoïdale $x(t) = x_m \cos(\omega t - \phi)$. On prend $\omega t - \phi$ comme référence des phases, et on trace $\omega_0^2 x_m$, horizontal, on le prolonge par $2\alpha\omega x_m$ vertical, et on complète par $\omega^2 x_m$, horizontal vers l'arrière. Le tout doit donner un vecteur de longueur g_m et de phase $+\phi$ par rapport à la référence.

On voit immédiatement sur la figure que

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{g_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \\ \cos \phi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \\ \sin \phi &= \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.5.2 Méthode des complexes

L'équation différentielle (4.1) a des coefficients réels, donc si une fonction complexe $\underline{x}(t)$ est solution, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont solutions de l'équation avec $\mathcal{R}e F(t)$ et $\mathcal{I}m F(t)$, respectivement. Cette propriété remarquable permet de chercher la solution sinusoïdale comme la partie réelle d'une solution

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_m \exp(i\omega t), \quad (4.6)$$

de l'équation

$$\ddot{\underline{x}} + 2\alpha\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = g_m \exp(i\omega t), \quad (4.7)$$

qui permet d'utiliser la simplicité des manipulations algébriques avec des exponentielles, au lieu des fonctions trigonométriques. Il faut remarquer que

$$\underline{x}_m = x_m \exp(-i\phi) , \quad (4.8)$$

contient à la fois le module et la phase de la solution cherchée. Si on reporte dans l'équation et simplifie par l'exponentielle qui est en facteur partout, on trouve

$$\underline{x}_m = \frac{G_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} , \quad (4.9)$$

ce qui permet de retrouver les résultats (4.5).

4.5.3 Méthode de la transformée de Laplace

Par rapport au cas des oscillations amorties du chapitre précédent, il y a un terme supplémentaire $g_m \exp(i\omega t)$ dont la transformée de Laplace est $g_m/(p - i\omega)$. La transformée de Laplace de la solution $x(t)$ recherchée est donc

$$X(p) = \frac{px_0 + \dot{x}_0 + 2\alpha x_0}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} + \frac{g_m}{(p - i\omega)(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} . \quad (4.10)$$

Il n'y a pas de difficulté à calculer la décomposition en éléments simples, mais c'est un peu long. La structure est la suivante : termes réguliers en $p = i\omega$ qui correspondent à des exponentielles décroissantes, et un terme de pôle en $p = i\omega$ qui correspond au régime stationnaire. Explicitement

$$X(p) = \frac{g_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \frac{1}{p - i\omega} + \dots \quad (4.11)$$

soit

$$\underline{x}(t) = \frac{g_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \exp(i\omega t) + \dots \quad (4.12)$$

et on retrouve bien l'amplitude et la phase du régime stationnaire. On pourrait bien-sûr faire un calcul complet et évaluer le régime transitoire en fonction des conditions initiales.

4.5.4 Aspects énergétiques

La puissance communiquée à la masse par la force extérieure est

$$\mathcal{P} = \dot{x}F(t) = -\omega x_m \sin(\omega t - \phi) G_m \cos(\omega t) . \quad (4.13)$$

Pour calculer sa valeur moyenne sur une période d'excitation $2\pi/\omega$, soit on développe $\sin(\omega t - \phi)$ et utilise $\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$; soit on utilise la formule $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b) - \sin(a - b)$, pour arriver dans les deux cas à

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} m \omega x_m G_m \sin \phi , \quad (4.14)$$

proportionnelle à x_m et à $\sin \phi$.

4.6 Résonance

4.6.1 Courbes de réponse

Il est intéressant de noter que x_m et ϕ dépendent fortement de la pulsation d'excitation ω , surtout si l'amortissement α est petit. Il est commode de poser $\Omega = \omega/\omega_0$ pour mesurer la pulsation en unités de la pulsation de référence ω_0 , de même de poser $x_m = (G_m/\omega_0^2)X$, etc. Au total, si on introduit les grandeurs sans dimension et universelles

$$\begin{aligned} X &= x_m \omega_0^2 / G_m, & V &= x_m \omega_0 / G_m, & A &= \alpha / \omega_0, \\ \Omega &= \omega / \omega_0, & \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{m G_m^2}{2 \omega_0} f(\Omega), \end{aligned} \quad (4.15)$$

on peut réécrire les résultats précédents comme

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 4A^2\Omega^2}}, & V &= \frac{\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 4A^2\Omega^2}}, \\ \cos \phi &= \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 4A^2\Omega^2}}, & \sin \phi &= \frac{2A\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + 4A^2\Omega^2}}, \\ f(\Omega) &= \frac{2A\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4A^2\Omega^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le tracé des courbes pour différentes valeurs de A donne les résultats suivants.

Pour A très petit, on a une réponse très intense au voisinage de $\omega = \omega_0$, et très petite en comparaison ailleurs. La phase proche de 0 pour $\omega < \omega_0$, de π pour $\omega > \omega_0$ évolue très rapidement, en passant par $\pi/2$ pour $\omega = \omega_0$.

Pour A un peu plus grand, l'effet est moins marqué.

Pour A plus grand, il s'estompe peu à peu.

On voit que si un système faiblement amorti est attaqué avec une pulsation *proche de sa pulsation propre*, il réagit très fortement, d'où les phénomènes spectaculaires évoqués en introduction.

La figure montre aussi que l'énergie est dissipée beaucoup plus si $\omega \simeq \omega_0$, surtout si l'amortissement est faible.

4.6.2 Bande passante, facteur de qualité

Pour caractériser l'acuité de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une *bande passante*

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2, \quad (4.17)$$

telle que

1. l'amplitude de la vitesse $v_m(\omega) \geq v_m(\omega_0)/\sqrt{2}$,
2. la phase est $\pi/4 \leq \phi \leq 3\pi/4$,
3. la puissance $\mathcal{P}(\omega) \geq \mathcal{P}(\omega_0)/2$.

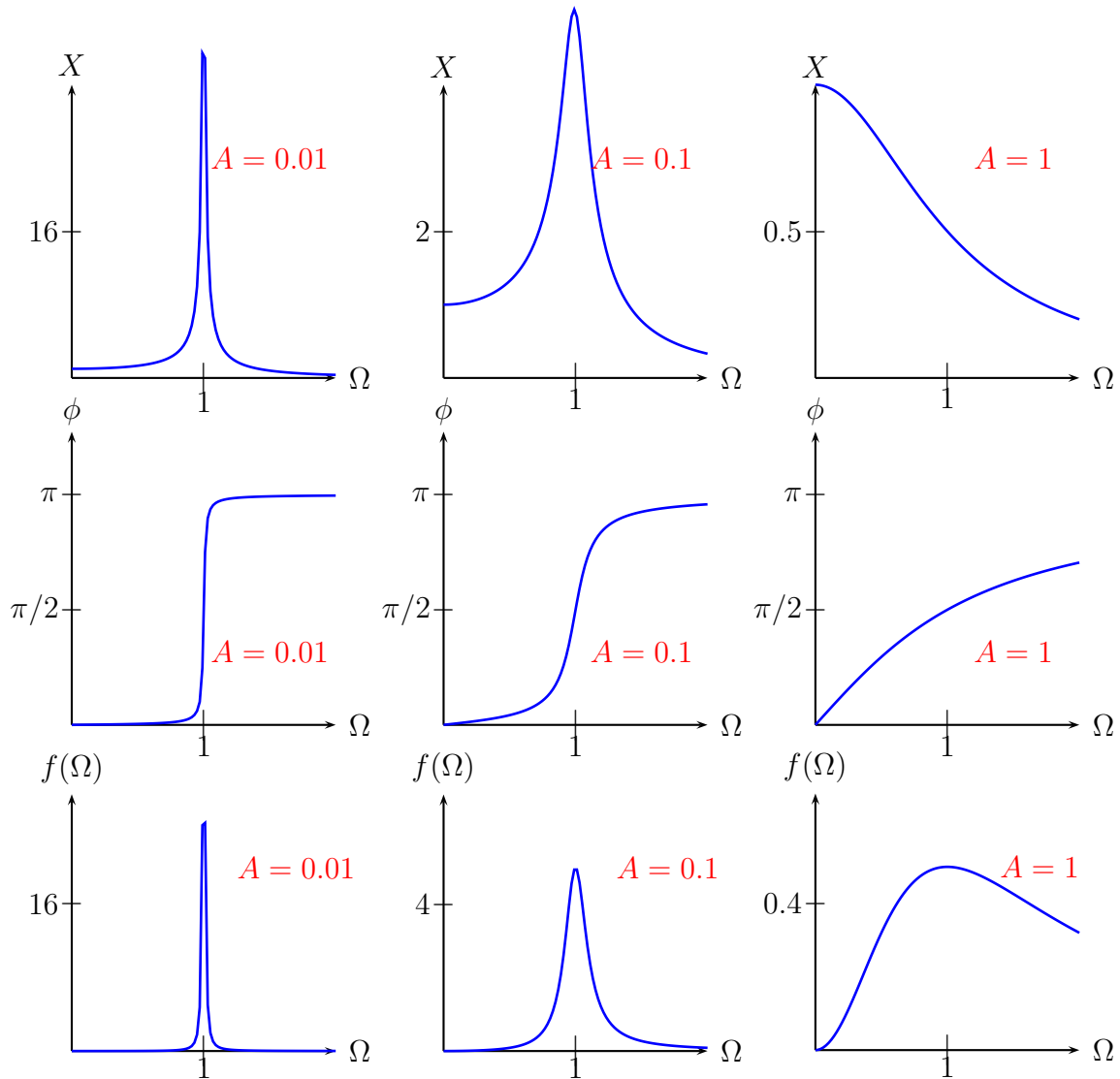


FIGURE 13 – Amplitude X , phase du déplacement ϕ et puissance réduite $f(\omega)$ en fonction du rapport $\Omega = \omega/\omega_0$ de la pulsation extérieure à la pulsation propre de l'oscillateur, pour différentes valeurs de l'amortissement

Voir figure 15. Ces critères sont compatibles entre eux et donnent les valeurs ω_1 , ω_2 et la bande passante

$$\omega_1 \simeq \omega_0(1 - A), \quad \omega_2 \simeq \omega_0(1 + A), \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2A\omega_0, \quad (4.18)$$

Aux extrémités de la bande passante, l'amplitude du mouvement, x_m est approximativement divisée par $\sqrt{2}$.

On définit le *facteur de qualité* Q par la relation

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}, \quad (4.19)$$

qui est donc un nombre sans dimension, d'autant plus grand que la résonance est étroite. En reportant l'expression ci-dessus, on trouve

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}. \quad (4.20)$$

Reste à démontrer (4.18). La puissance moyenne contient le facteur

$$f(\Omega) = \frac{2A\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4A^2\Omega^2}, \quad (4.21)$$

maximal pour $\Omega = 1$, avec valeur $1/(2A)$, ce qui définit les extrémités de la bande par l'équation $f(\Omega) = 1/(4A)$, qui s'écrit

$$\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2 = 4A^2, \quad (4.22)$$

qui se sépare en deux équations dont on prend la racine positive

$$\Omega_{1,2}^2 \pm 2A\Omega_{1,2} - 1 = 0, \quad (4.23)$$

qui donne, par soustraction, exactement

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 2A, \quad (4.24)$$

et en supposant que la bande passante est centrée autour de $\Omega = 1$, approximation d'autant meilleure que cette bande passante est étroite,

$$\Omega_1 \simeq 1 - A, \quad \Omega_2 \simeq 1 + A. \quad (4.25)$$

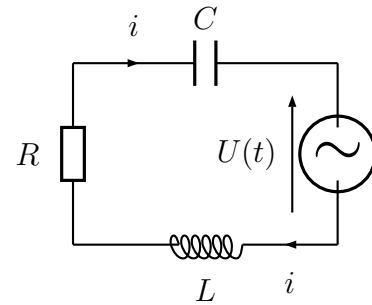


FIGURE 14 – Circuit R, L, C alimenté en alternatif

4.7 Excitation d'un circuit R, L, C

Un circuit R, L, C alimenté par une tension alternative $U_m \cos(\omega t)$ est l'analogue parfait de l'oscillateur amorti excité par une force sinusoïdale. Mais, il y a des traditions un peu différentes quant aux notations.

Par exemple, l'usage est d'exprimer le résultat moins souvent par la charge q , l'analogue de $x(t)$, que par l'intensité $i(t)$. En notations complexes, si $\underline{i} = \underline{I}_m$ pour le régime permanent, $U_m = \underline{Z} \underline{I}_m$ définit l'impédance \underline{Z} qui généralise en alternatif la notion de résistance pour les courants continus. Ici

$$\underline{Z} = R + iL\omega - \frac{i}{C\omega}, \quad (4.26)$$

Autre conséquence du changement de $q(t)$ à $i(t)$: si on définit le déphasage comme $i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi)$, il y aura un décalage de $\pi/2$ par rapport à la notation précédente, et la courbe donnant ϕ en fonction de ω aura l'allure de la figure. En basse fréquence, le condensateur domine et $\phi \sim -\pi/2$. À la résonance, les réactances se neutralisent, le circuit se comporte comme une résistance pure, et $\phi = 0$. Pour les hautes fréquences, l'auto-induction impose $\phi \sim \pi/2$.

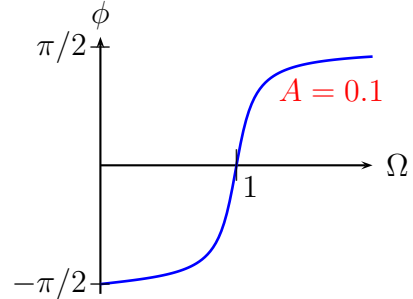


FIGURE 16 – Déphasage du courant par rapport à la tension, pour un circuit R, L, C , en fonction de la pulsation réduite $\Omega = \omega/\omega_0$

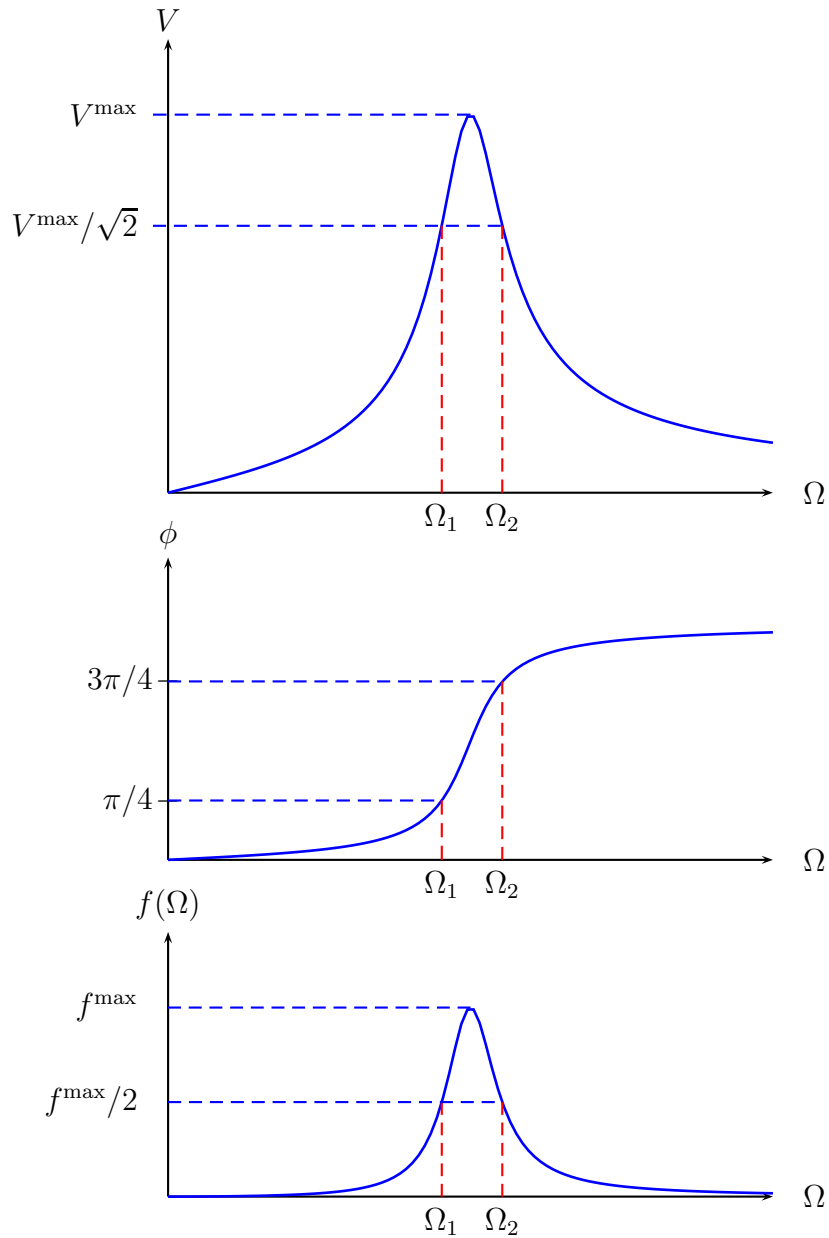


FIGURE 15 – Les extrémités de la bande passante correspondent à une amplitude de vitesse $\sqrt{2}$ fois plus petite qu'à la résonance, à un déphasage de $\pi/4$ ou $3\pi/4$ ou bien à une puissance moitié de sa valeur à la résonance.

5 Oscillations couplées

5.1 Introduction

Il s'agit d'un phénomène général : un dispositif mécanique qui vibre entraîne des oscillations dans les pièces avec lesquelles il est en contact. La roue fait vibrer le moteur et la carrosserie, par exemple. Ces oscillations sont exceptionnellement sur une seule fréquence, en phase ou en opposition de phase. En général les oscillations couplées font intervenir une superposition de plusieurs fréquences.

Dans ce chapitre, seront traitées en détail les oscillations de deux ressorts identiques couplés par un troisième ressort, pour lequel les calculs sont faciles, et un mot sera dit de cas plus généraux. Les TD offriront des exemples de couplage par inertie ou par amortisseur, et de leurs analogues électriques.

La chaîne infinie de ressorts introduit un enchaînement avec la seconde partie du cours, dédiée aux ondes.

5.2 Oscillation de deux ressorts couplés

Le dispositif est schématisé sur la figure. Chaque masse est repérée par rapport à sa

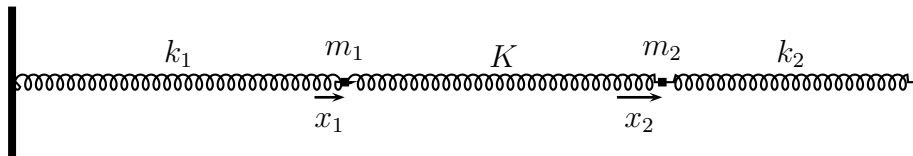


FIGURE 17 – Ressorts couplés

position d'équilibre, qui, en général, n'est *pas* la position de repos. Si par exemple, on écrit que le ressort de gauche exerce une force $-k_1x_1$, il ne s'agit pas de la force totale exercée par ce ressort, mais de la force *supplémentaire* due à l'écart de m_1 par rapport à l'équilibre. Cette façon de raisonner élimine les termes constants des bilans de force.

Noter aussi que les deux axes sont dirigés dans le même sens. Cette convention, qui paraît naturelle, fait que $x_1 > 0$ comprime le ressort central, tandis que $x_2 > 0$ l'étire. Quand on traite l'analogie électrique de ce problème (voir TD), on est naturellement amené à adopter une convention différente pour les charges q_1 et q_2 , avec l'analogie $x_1 \leftrightarrow q_1$ et $x_2 \leftrightarrow -q_2$.

La loi de Newton pour ces ressorts est

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + K(x_2 - x_1), \quad m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - K(x_2 - x_1), \quad (5.1)$$

car si, par exemple, $x_2 > x_1$, le ressort central est étiré et tire positivement à gauche et négativement à droite.

La résolution générale de ce système dépasse un peu le cadre de ce cours. Pour une seule équation, $m\ddot{x} + kx = 0$, la recherche d'une solution $x(t) \propto \cos(\omega t)$ donne une seule valeur de ω et une phase arbitraire, dictée par les conditions initiales. Pour (5.1), on peut chercher de même les solutions

à fréquence commune, $x_1 = a_1 \cos(\omega t)$, $x_2 = a_2 \cos(\omega t)$, ce qui donne le système d'équations homogènes

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + K)a_1 - Ka_2 = 0, \quad -Ka_1 + (-m_2\omega^2 + k_2 + K)a_2 = 0. \quad (5.2)$$

En général, le déterminant est non nul, et la solution $a_1 = a_2 = 0$ est unique. Mais pour les valeurs particulières de ω qui annulent le déterminant, on a la possibilité d'avoir a_1 et a_2 non nuls, avec toutefois le rapport a_2/a_1 fixé, soit $\{a_1, a_2\} \propto \{1, \lambda\}$. Deux pulsations, ω_a et ω_b (choisies positives) annulent le déterminant, et la solution la plus générale est

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_a \end{pmatrix} + B \cos(\omega_b t + \phi_b) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_b \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

où les quantités ω_a , ω_b , λ_a et λ_b sont intrinsèques, c'est à dire déterminées par les équations du mouvement, tandis que les amplitudes A , B , λ_a et λ_b varient d'une expérience à l'autre, au gré des conditions initiales.

L'idée sous-jacente, dans l'annulation de ce déterminant, c'est qu'en combinant linéairement les équations, on arrive à des équations découplées pour les nouvelles inconnues. C'est que ce nous allons montrer explicitement sur un cas particulier.

Considérons le cas symétrique où $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_2 = m$ et $K = k$ pour simplifier les calculs. Les deux équations s'écrivent, avec $\omega_0^2 = k/m$,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 &= \omega_0^2 x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 &= \omega_0^2 x_1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

et si on les ajoute et les retranche, on arrive à

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0, \quad \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 3\omega_0^2(x_1 - x_2) = 0, \quad (5.5)$$

qui sont découplées et ont pour solution

$$x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad x_1(t) - x_2(t) = B \cos(\omega_0 \sqrt{3}t + \psi). \quad (5.6)$$

exhibant les pulsations propres ω_0 et $\omega_0 \sqrt{3}$ ^g.

5.3 Interprétation physique

Les conditions initiales les plus générales peuvent être considérées comme une combinaison linéaire du cas où $x_{1,0} = x_{2,0}$ et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0}$ et du cas où $x_{1,0} = -x_{2,0}$ et $\dot{x}_{1,0} = -\dot{x}_{2,0}$.

Pour le premier cas, prenons l'exemple de $x_{1,0} = x_{2,0}$ avec vitesses nulles. Les deux masses sont écartées de la même quantité et relâchées. Le ressort central n'est pas modifié. Chaque masse évolue sous l'effet du ressort qui la relie au mur, et oscille donc avec la pulsation ω_0 .

Pour le second cas, écartons les masses symétriquement, ce qui avec nos conventions, correspond à $x_{1,0} = -x_{2,0}$, et lâchons les. Par raison de symétrie, on aura toujours $x_1(t) =$

g. cette valeur serait différente si $K \neq k$

$-x_2(t)$, et le ressort central est comprimé ou étiré symétriquement. Tout se passe comme si le milieu du ressort central était fixé par un clou. La première masse, par exemple, est retenue par un ressort k à sa gauche, et un ressort $2k$ à sa droite^h, soit une raideur $3k$, d'où la pulsation $\omega_0\sqrt{3}$.

5.4 Battements

Si on reprend les calculs avec $K \neq k$, on trouve que les pulsations propres, pour les modes parallèle et symétrique, sont

$$\omega_p = \omega_0, \quad \omega_s = \omega_0\sqrt{1 + 2K/k}, \quad (5.7)$$

si bien que pour une ressort central mou, $K \ll k$, les deux pulsations qui se composent dans $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont très voisines et donnent lieu à des battements. Voir figure.

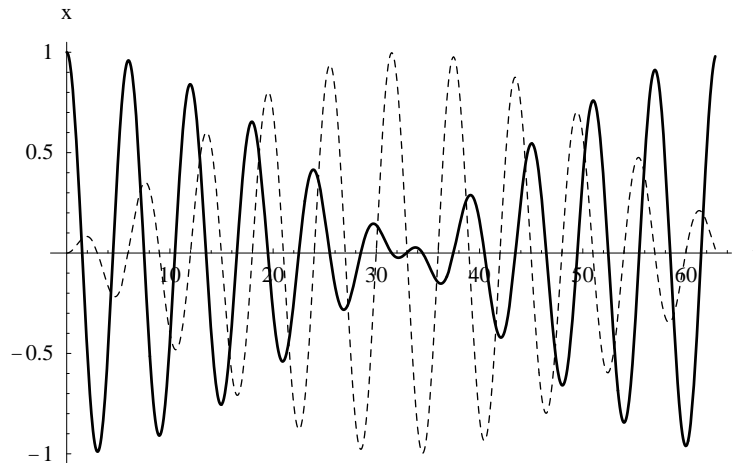


FIGURE 18 – Solutions pour $m_1 = m_2 = 1$ et $k_1 = k_2 = 1$, $K = 0, 1$, avec les conditions initiales $x_{1,0} = 1$, $x_{2,0} = \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$. Chaque déplacement $x_i(t)$ exhibe des battements, en opposition pour respecter la conservation de l'énergie.

5.5 Bilan d'énergie

Dans un système couplé, l'énergie totale est conservée, mais pas l'énergie individuelle de chaque oscillateur.

Avec les notations précédentes, l'énergie se décompose en

- l'énergie $m\dot{x}_1^2/2 + kx_1^2/2$ du premier oscillateur,
- l'énergie $m\dot{x}_2^2/2 + kx_2^2/2$ du second oscillateur,
- l'énergie $K(x_1 - x_2)^2/2$ du couplage.

Ces termes sont représentés sur la figure, avec les valeurs numériques et conditions initiales donnant les battements représentés sur la figure précédente.

h. un ressort de longueur moitié a une raideur double

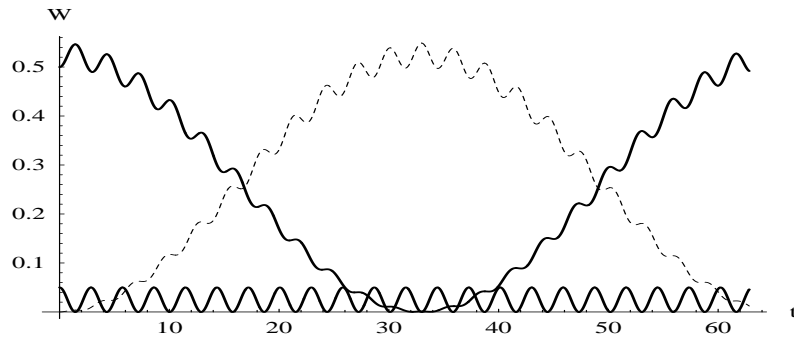


FIGURE 19 – Différentes contributions à l'énergie totale pour $m_1 = m_2 = 1$ et $k_1 = k_2 = 1$, $K = 0, 1$, avec les conditions initiales $x_{1,0} = 1$, $x_{2,0} = \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$: énergie du premier oscillateur, énergie du second, et énergie de couplage.

5.6 Oscillateurs couplés amortis

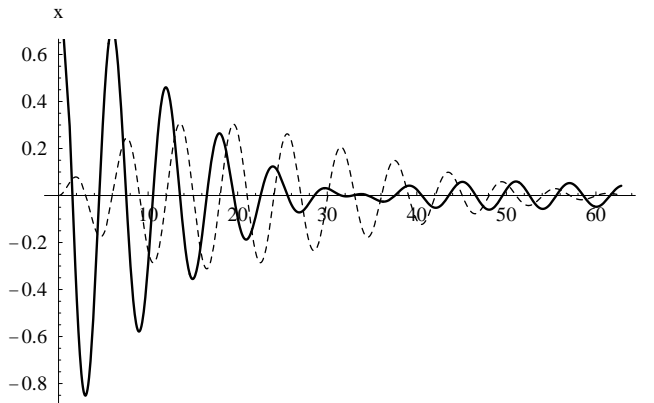


FIGURE 20 – Solutions du système 5.8, avec les mêmes paramètres et conditions initiales que pour la figure 18, mais une force de frottement $-\lambda\dot{x}_i$, $\lambda = 0, 1$, agit aussi sur chaque oscillateur.

Dans le cas de masses et ressorts latéraux identiques, on obtient

$$m\ddot{x}_1 + \lambda\dot{x}_1 + kx_1 = K(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 + \lambda\dot{x}_2 + kx_2 = K(x_1 - x_2), \quad (5.8)$$

Un exemple de solution est donnée dans la figure.

5.7 Oscillateurs couplés excités

Si une force extérieure s'applique à l'une des masses, ou à chacune des masses, la dynamique est décrite par un système avec second membre, par exemple,

$$m\ddot{x}_1 + \lambda\dot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F(t), \quad m\ddot{x}_2 + \lambda\dot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0. \quad (5.9)$$

La structure des solutions est la même que pour un oscillateur unique excité extérieurement :

Il n'y a pas de difficulté de principe à introduire des termes d'amortissement. On recherche toujours des combinaisons qui obéissent à des équations indépendantes, mais les solutions de ces équations ne sont plus en $\exp(\pm i\omega t)$ (d'où $\cos(\omega t + \phi)$), mais en $\exp(rt)$, où r est soit complexe avec une partie réelle négative, soit réel négatif.

- la solution la plus générale est la somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque du système homogène associé,
- si $\lambda > 0$ la solution asymptotique ($t \rightarrow \infty$) est universelle, indépendante des conditions initiales,
- si $F(t)$ est périodique, cette solution asymptotique est périodique,
- si $F(t) = F_m \cos(\omega t)$ est sinusoidale, cette solution asymptotique est faite de deux sinusoides $x_i = a_i \cos(\omega t - \phi_i)$.

Un exemple de a_i et ϕ_i en fonction de ω est donné dans la figure : on voit un pic et une variation rapide de phase quand ω passe par les fréquences propres du système. Il y a autant de résonances que de degrés de liberté.

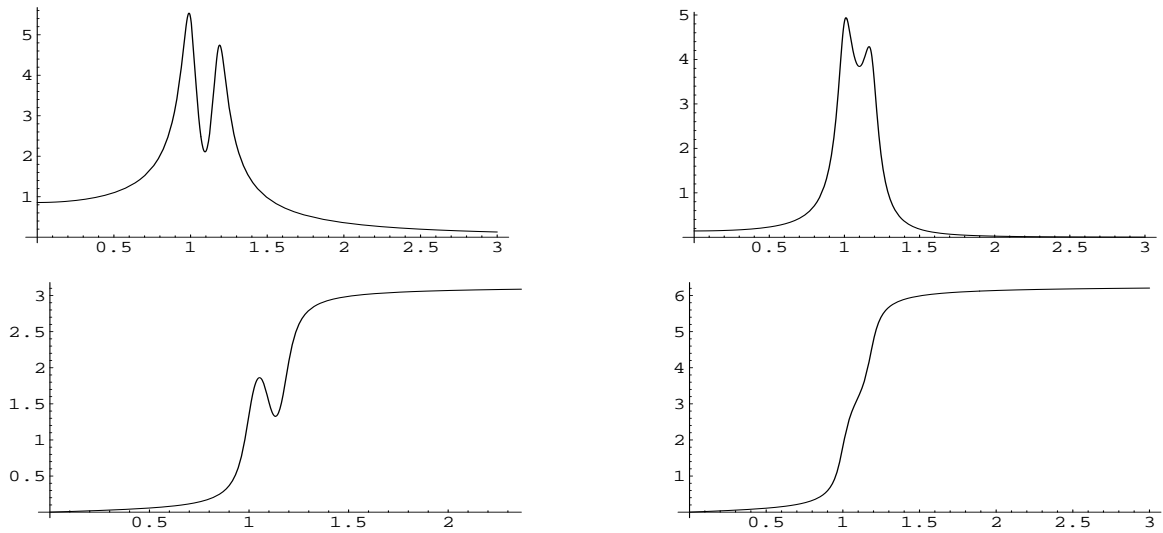


FIGURE 21 – Amplitudes a_i et phases ϕ_i en fonction de ω du régime permanent pour une excitation sinusoidale $F(t) = F_m \cos(\omega t)$ dans l'équation (5.9). Les valeurs sont $F_m = 1$, $m = 1$ et $k = 1$, $K = 0, 2$, $\lambda = 0, 1$.

5.8 Chaîne d'oscillateurs

Les notations sont résumées sur la figure. La masse m_n est décalée de x_n par rapport à sa

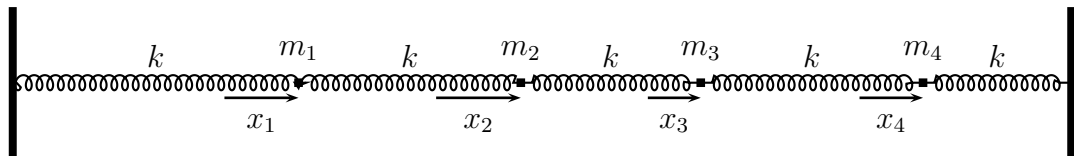


FIGURE 22 – Chaîne de ressorts

position d'équilibre. Le ressort situé à sa droite voit sa longueur modifiée de $x_{n+1} - x_n$ par rapport à cet équilibre et exerce donc une force supplémentaire $k(x_{n+1} - x_n)$ qui est bien

positive si $x_{n+1} - x_n > 0$. De même, le ressort situé à gauche exerce une force supplémentaire $k(x_{n-1} - x_n)$. La loi de Newton est donc

$$m\ddot{x}_n + 2kx_n - k(x_{n+1} + x_{n-1}) = 0, \quad (5.10)$$

qui peut être valable également pour la première ($n = 1$) et la dernière ($n = N$) masse si on convient que

$$x_0 = x_{N+1} = 0. \quad (5.11)$$

On cherche des modes sinusoïdaux $x_i \propto \cos(\omega t + \phi)$ de même pulsation pour toutes les masses, sachant qu'on pourra ensuite superposer ces solutions pour construire des solutions plus générales. Plus précisément, on pose

$$\underline{x}_n(t) = A \exp[i(\omega t + \alpha n)], \quad (5.12)$$

La motivation pour une telle forme, avec des amplitudes $\underline{A}_n = A \exp(i\alpha n)$ en progression géométrique, vient de ce que $\underline{x}_n(t) = \underline{A}_n \exp(\omega t)$ donne

$$\underline{A}_{n+1} - \underline{A}_n(2 - \omega^2/\omega_0^2) + \underline{A}_{n-1} = 0, \quad (5.13)$$

avec $\omega_0^2 = k/m$, ce qui évoque qu'une progression géométrique $u_n = r^n$ vérifie une relation de récurrence du second ordre à coefficients constants. On vérifie que $u_n \propto r^n$ est solution d'une relation de récurrence $au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0$ si r obéit à l'équation, dite « caractéristique » $ar^2 + br + c = 0$.

Ici, cette équation caractéristique est $r^2 - (2 - \omega^2/\omega_0^2)r + 1 = 0$. Le produit des racines est $r_1 r_2 = 1$, la somme $r_1 + r_2 = 2 - \omega^2/\omega_0^2 < 2$, ce qui exclut deux racines réelles r et $1/r$ pour lesquelles $r + 1/r \geq 2$. Le discriminant est négatif et les racines sont deux complexes conjugués de module 1, $r_{1,2} = \exp(\pm i\alpha)$, d'où la notation (5.13).

En reportant (5.11), on obtient

$$\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha) = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \sin^2(\alpha/2) = \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}, \quad (5.14)$$

ce qui signifie que toute valeur de ω telle que $0 \leq \omega \leq 2\omega_0$ est *a priori* envisageable, et que pour ω donné, deux valeurs de α sont possibles, opposées l'une de l'autre.

En combinant les deux solutions $\exp(i\alpha n)$ et $\exp(-i\alpha n)$, on peut former le réel $\sin(\alpha n)$ qui s'annule pour $n = 0$ et satisfait la première des conditions (5.11). On cherche à ce stade une solution

$$x_n(t) = A \cos(\omega t + \phi) \sin(\alpha n), \quad (5.15)$$

et la second condition limite sera vérifiée si

$$\sin[(N+1)\alpha] = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{N+1}, \frac{2\pi}{N+1}, \dots, \frac{k\pi}{N+1}, \dots \quad (5.16)$$

où l'on peut se restreindre à $k > 0$ (sinon on change A en $-A$), et à $k \leq N$ (sinon on retrouve les mêmes solutions changées de signe).

En résumé, nous obtenons N solutions stationnaires indépendantes dont les combinaisons linéaires construisent la solution la plus générale. Ce sont

$$\begin{aligned} x_n^{(k)}(t) &= A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \sin(\alpha_k n), & k = 1, 2, \dots, N \\ \alpha_k &= \frac{k\pi}{N+1}, & \omega_k = 2\omega_0 \sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Elles sont représentées sur la figure pour $N = 4$, avec une amplitude $A_k = 1$ au moment où $\cos(\omega_k t + \phi_k) = 1$. Pour $k = 1$ les masses vibrent toutes en phase. Pour $k = 2$, celles de gauche sont en opposition avec celles de droite. Puis les changements de phase sont de plus en plus fréquents quand n varie.

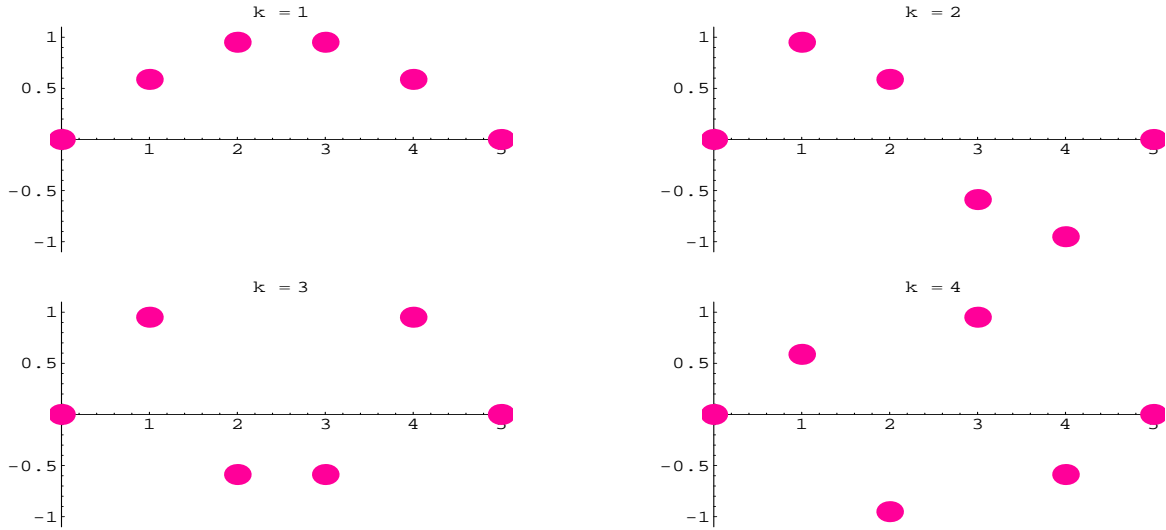


FIGURE 23 – Instantané des quatre masses au moment d'élongation maximale pour les quatre modes d'une chaîne de quatre ressorts identiques.

La limite de $N \rightarrow \infty$ donne un avant-goût des ondes acoustiques stationnaires. On suppose que le ressort a un module d'Young Y réparti sur une longueur totale L . Chaque ressort a une longueur $\ell = L/(N+1)$, et une raideur $k = Y/\ell = Y(N+1)/L$. La masse totale M est répartie en N masselottes $m = M/N$. D'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{Y}{ML}} \sqrt{N(N+1)}, \quad (5.18)$$

et (5.17) devient, pour les modes $k \ll N$,

$$\omega_k \simeq k\pi \sqrt{\frac{Y}{ML}}, \quad (5.19)$$

où apparaît une fréquence fondamentale ω_1 et ses harmoniques $\omega_k = k\omega_1$. Par ailleurs, si on réécrit la dépendance spatiale des solutions $\sin(\alpha n) = \sin(Kx_n)$, avec $x_n = nL/N$

l'abscisse de la n^{e} masse et $K = \alpha N/L$, on voit d'après (5.14), que

$$\frac{\omega}{K} \rightarrow \sqrt{YL/M} \quad (5.20)$$

qui est la vitesse de propagation, la même pour tous les modes.

5.9 Méthode de Laplace pour des oscillateurs couplés

Revenons par exemple aux équations couplées (5.1). Si on cherche les transformées de Laplace $X_1(p)$ et $X_2(p)$, il faut résoudre

$$\begin{aligned} [m_1 p^2 + (k_1 + K)]X_1(p) - KX_2(p) &= m_1 p x_{1,0} + m_1 \dot{x}_{1,0} , \\ -KX_1(p) + [m_2 p^2 + (k_2 + K)]X_2(p) &= m_2 p x_{2,0} + m_2 \dot{x}_{2,0} , \end{aligned} \quad (5.21)$$

On voit que la solution pour $X_1(p)$ ou $X_2(p)$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur est le déterminant de la matrice des coefficients. Si on arrive à écrire ce déterminant comme $m_1 m_2 (p^2 + \omega_a^2)(p^2 + \omega_b^2)$, on voit que la TL de $x_1(t)$ sera de la forme

$$X_1(p) = \frac{A_1 p + \alpha_1}{p^2 + \omega_a^2} + \frac{B_1 p + \beta_1}{p^2 + \omega_b^2} , \quad (5.22)$$

où on peut tout calculer explicitement avec un peu de temps et d'application. On obtient

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_a t) + \frac{\alpha_1}{\omega_a} \sin(\omega_a t) + B_1 \cos(\omega_b t) + \frac{\beta_1}{\omega_b} \sin(\omega_b t) , \quad (5.23)$$

et quelque chose d'analogue pour $x_2(t)$. On retrouve bien les pulsations propres comme racines du même déterminant.

6 Ondes à une dimension

6.1 Introduction

Jusqu'à présent n'étaient envisagées dans ce cours que des variations de grandeurs mécaniques ou autres en un point donné : potentiel d'un condensateur, vitesse d'une masse accrochée à un ressort, etc.

Dans un milieu continu, la variation d'une grandeur en un point entraîne sa modification un peu plus loin un peu plus tard, par un phénomène de *propagation*. Par exemple, des voyageurs sur un quai se lèvent les uns après les autres si celui qui est au bout est informé que le train va arriver et transmet la nouvelle à ses voisins.

Dans un tuyau, une compression locale a tendance à se propager : ce sont les ondes acoustiques.

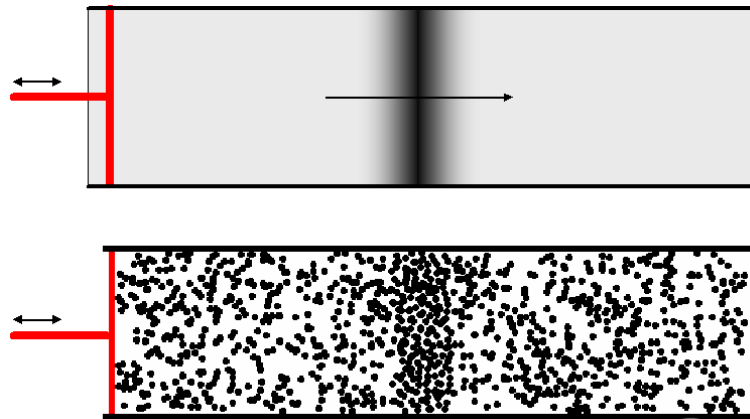


FIGURE 24 – Onde de compression dans un tuyau rempli d'air

L'excitation transverse d'une corde nous fournira le premier exemple d'onde mécanique. On agite la corde à un bout, le signal se propage. Et si l'agitation est entretenue, une onde progressive est créée.

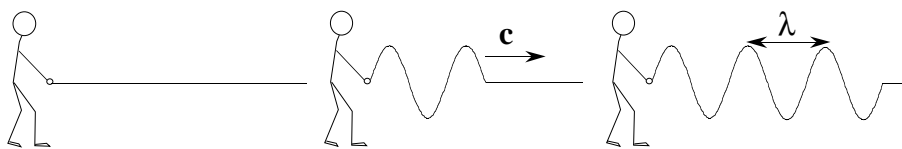


FIGURE 25 – Propagation d'un train d'onde sur une corde tendue

Nous envisagerons aussi la propagation d'ondes électriques sur une ligne de transport, la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide ou dans un milieu, et la propagation des ondes thermiques. Les ondes mécaniques et électromagnétiques obéissent à une équation de commune, qui assure une vitesse commune à toutes les fréquences. Ce n'est pas le cas pour les ondes thermiques, ou pour les ondes de concentration, et les signaux sont de ce fait déformés.

6.2 Définitions

Le prototype d'une onde est $y(x, t) = a \cos(kx - \omega t + \phi)$, qui est parfois écrit avec $\cos(\omega t - kx + \phi)$, ce qui change le signe de ϕ . Il y a de (trop) nombreuses grandeurs définies. Pour la dépendance en temps, ω est la *pulsation*, avec $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ si ν est la *fréquence* et T la *période*.

La différence entre $a \cos(kx - \omega t + \phi)$ et $b \cos(kx + \omega t + \phi)$, si $k > 0$ et $\omega > 0$, c'est que la première se propage *vers les x positifs* et la seconde vers les $x < 0$. En effet, si on suit un point de phase constante, par exemple un maximum, il obéit dans le premier cas à une équation $kx - \omega t = C^{\text{te}}$, qui est analogue à la loi horaire d'un mobile se déplaçant avec une vitesse positive.

Pour la dépendance spatiale, k est la *nombre d'onde*, avec $k = 2\pi/\lambda$ définissant la *longueur d'onde*. Si on écrit plus généralement $y(\mathbf{r}, t) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$, le *vecteur d'onde* \mathbf{k} indique également la direction de propagation.

Au temps $t = 0$, la vibration est maximale aux points tels que $\cos(kx + \phi) = 1$ (si $a > 0$). Prenons le point $x = -\phi/k$. À un instant $t > 0$, ce point est à l'abscisse $x = \omega t/k + \phi/k$. Le maximum se déplace comme un mobile de vitesse uniforme ω/k , qui est la *vitesse de propagation*.

Dans cet exemple, le cas le plus simple est conceptuellement celui où a est constant. L'onde se propage alors sans atténuation. En pratique, a finira toujours par décroître. Si la modélisation est $a(x) = a_0 \exp(-|x|/\ell)$, ℓ est la *longueur d'atténuation*, ou *longueur de pénétration* (par exemple pour une onde électromagnétique dans un milieu).

6.3 Propagation d'un signal riche

En pratique, les ondes mécaniques contiennent plusieurs fréquences, les sons s'étalent dans le grave et l'aigu, les signaux visuels ont une gamme chromatique. Un modèle simple est

$$y(x, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x), \quad (6.1)$$

Une reproduction *fidèle* en $x > 0$ du signal en $x = 0$ implique :

1. que les signaux ont gardé leur amplitude respective a_1 et a_2 ou bien sont atténués par le même facteur,
2. que la synchronisation n'est pas altérée, c'est-à-dire que les signaux se sont propagés avec la même vitesse.

Un manquement à la première condition serait par exemple un son dont on ne percevrait bien que l'aigu, et dont les graves seraient effacés.

Pour la seconde condition, imaginons un instant que les ondes optiques n'aient pas toutes la même vitesse. D'un train qui passe au loin, un observateur verrait d'abord la carcasse grise, sans portes, et un peu plus tard, il verrait passer les portes orange, seules !

Noter que la désynchronisation existe : par temps d'orage, on voit un éclair au loin et n'entend le bruit que quelques secondes plus tard. De même pour le passage d'un avion.

La figure donne quelques exemples de déformation. Les effets sont séparés, mais dans la pratique, ils sont souvent tous présents en même temps. Le premier exemple compare $\cos(t) + (1/4)\cos(2t)$ dont l'harmonique est réduite de moitié par rapport au signal de référence $\cos(t) + (1/2)\cos(2t)$. Le deuxième exemple compare les graphes de l'évolution en temps de $y(x, t) = \cos(t - x) + (1/2)\cos(2t - 1,5x)$ en $x = 0$ (référence), puis en $x = 1$ et $x = 2$. Le fait que la vitesse ω/k de l'harmonique n'est pas la même que pour le fondamental induit de graves distorsions.

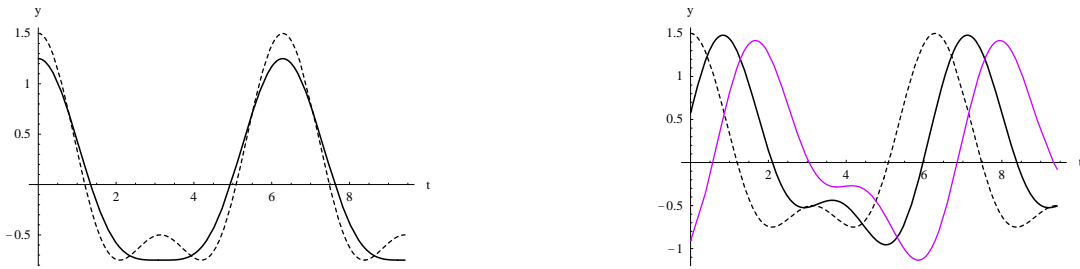


FIGURE 26 – Exemples de déformation : à gauche, la première harmonique est atténuée dans le signal perçu (trait plein) par rapport au signal émis (pointillé) ; à droite, la première harmonique n'est pas atténuée, mais elle se propage à une vitesse différente et le signal à différentes valeurs de $x > 0$ ne reproduit pas le signal de référence.

6.4 Vitesse de phase, vitesse de groupe

Reprenons le cas d'un signal à deux composantes chromatiques (6.1) dans le cas où les deux fréquences sont voisines. Pour chaque valeur de x , nous avons des battements : un signal rapide de pulsation $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2$ oscillant dans une enveloppe évoluant avec la pulsation $\omega_d = (\omega_2 - \omega_1)/2$, si $\omega_2 > \omega_1$.

Pour $x = 0$, cela correspond à la décomposition

$$a_1 \exp(i\omega_1 t) + a_2 \exp(i\omega_2 t) = \exp(i\omega_s t) [a_2 \exp(i\omega_d t) + a_1 \exp(-i\omega_d t)] . \quad (6.2)$$

qui se généralise immédiatement en

$$a_1 \exp(i\omega_1 t - ik_1 x) + a_2 \exp(i\omega_2 t - ik_2 x) = \exp(i\omega_s t - ik_s x) [a_2 \exp(i\omega_d t - ik_d x) + a_1 \exp(-i\omega_d t + ik_d x)] . \quad (6.3)$$

avec $k_s = (k_1 + k_2)/2$ et $k_d = (k_2 - k_1)/2$. On voit que l'enveloppe et le signal rapide se propagent aux vitesses respectives

$$v_\phi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}, \quad v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \quad (6.4)$$

qui sont nommées *vitesse de phase* et *vitesse de groupe*. Pour un signal plus riche, la vitesse de phase est simplement la vitesse ω/k de la composante chromatique ω et elle peut varier

avec ω . La vitesse de groupe, $v_g(\omega)$ est la dérivée de ω par rapport à k .

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k}, \quad v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.5)$$

La vitesse qui compte dépend du détecteur. S'il est sensible à la composante rapide des battements, ce sera la vitesse de phase. Mais le plus souvent, le détecteur ne perçoit que les modulations, et est donc sensible à la vitesse de groupe.

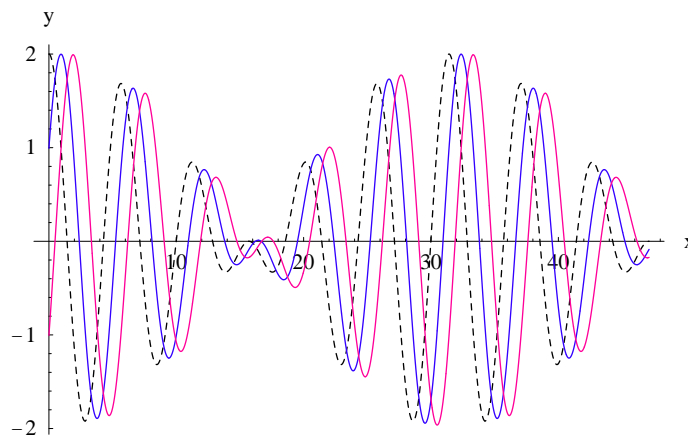


FIGURE 27 – Propagation d'une superposition de deux fréquences voisines. L'état de la vibration est représenté en fonction de x à des instants successifs. Un œil exercé verra que les pics fins se propagent plus vite que l'enveloppe.

7 La corde vibrante

7.1 Tension de la corde

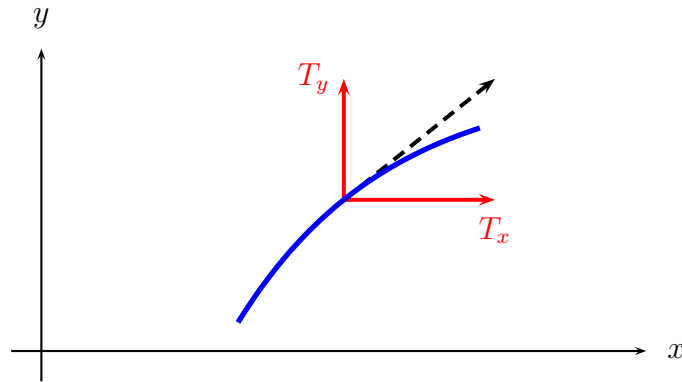


FIGURE 28 – Tension de la corde en un point

La corde est tendue horizontalement, avec une tension Y . On n'envisage que des petits déplacements verticaux, qui ne donnent que de petites inclinaisons, même si les effets sont grossis sur les figures.

L'effet de la pesanteur est négligé.

Comme il n'y a pas de déplacement horizontal, et comme les angles sont petits, on aura

$$T_x \simeq T = C^{\text{te}}, \quad (7.1)$$

et comme la tension est parallèle à la tangente à la courbe, $T_y/T_x = dy/dx$, qu'il faut convertir en dérivées partielles si y dépend aussi du temps, soit

$$T_y(x) = T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}, \quad (7.2)$$

force verticale exercée par la partie gauche sur la partie droite, en x . Inversement, la partie gauche exerce une force verticale $-T_y(x)$ sur la partie droite.

7.2 Equation du mouvement

Écrivons la loi de Newton pour un élément compris entre les abscisses x et $x + dx$, et de masse μdx , si μ est la masse linéique de la corde, supposée homogène. En projection verticale

$$\mu dx \ddot{y} = T_y(x + dx) - T_y(x) = T \left[\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right], \quad (7.3)$$

qui fait apparaître par division par dx la dérivée partielle seconde $\partial^2 y(x, t) / \partial x^2$ et que nous pouvons réécrire

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\mu}, \quad (7.4)$$

Cette équation a des propriétés remarquables. la première est d'être linéaire, avec pour conséquence qu'une superposition de solutions simples sert à former un éventail plus grand de solutions.

Si on cherche une onde progressive $y(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx + \phi)$, on arrive à $\omega^2 = c^2 k^2$, ce qui signifie que toutes les pulsations $0 < \omega < +\infty$ sont possibles, pourvu que $k = \omega/c$, $A \cos(\omega t - kx + \phi)$ décrivant une onde qui se propage vers les $x \nearrow$, $A \cos(\omega t + kx + \phi)$ vers les $x \searrow$. Cette onde se propage *sans atténuation* et avec une *vitesse universelle* $\omega/k = c = \sqrt{T/\mu}$, ce qui fait (voir chapitre précédent) un signal complexe est transmis *sans déformation*.

Le résultat précédent donne comme solution toute superposition

$$y(x, t) = \sum_{\omega} A_{\omega} \cos(\omega(t - x/c) + \phi_{\omega}) + \sum_{\omega} B_{\omega} \cos(\omega(t + x/c) + \psi_{\omega}), \quad (7.5)$$

où l'on voit que si riche que soit la palette chromatique, $y(x, t)$ n'est jamais qu'une fonction de $t - x/c$ ajoutée à une fonction de $t + x/c$. Nous avons en effet un des rares exemples d'équation aux dérivées partielles soluble analytiquement. Les mathématiciens posent $u = t - x/c$, $w = t + x/c$, $y(x, t) = \tilde{y}(u, w)$ et réécrivent l'équation comme

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}(u, w)}{\partial u \partial w} = 0, \quad (7.6)$$

dont la solution la plus générale est bien

$$\tilde{y}(u, w) = f(u) + g(w), \quad \text{soit} \quad y(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c), \quad (7.7)$$

où f et g sont deux fonctions dérivables quelconques.

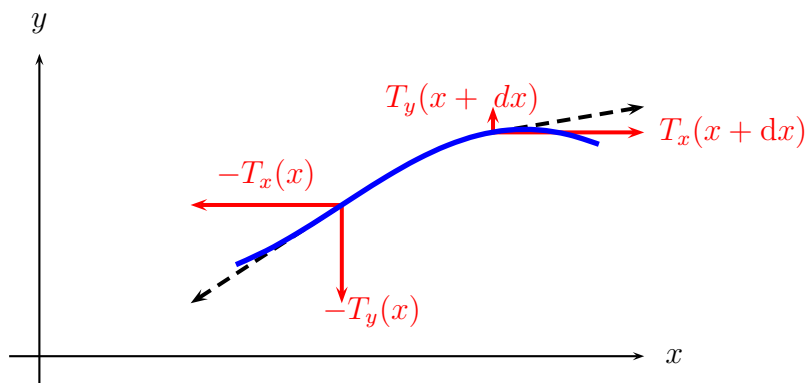


FIGURE 29 – Bilan sur un élément dx

7.3 Bilan d'énergie

Dans un mode monochromatique se propageant par exemple vers la droite, un petit élément dx autour de la position x a un mouvement et une vitesse

$$y(t) = A \cos(\omega t - kx + \phi), \quad \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \phi), \quad (7.8)$$

ce qui correspond à une énergie cinétique moyenne (se souvenir que $\langle \sin^2(\omega t + \dots) \rangle = 1/2$) qui vaut $\langle E_c \rangle = \langle \mu dx A^2 \omega^2 / 4 \rangle$. Mais (voir chapitre 2) pour cet oscillateur, ce n'est que la moitié de l'énergie qui se partage à parts égales entre énergie cinétique moyenne et énergie potentielle moyenne. Il y a donc une densité linéique d'énergie

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2, \quad (7.9)$$

Quand l'onde se propage avec la vitesse c , elle apporte pendant un temps dt cette énergie sur une longueur $c dt$ où cette énergie demeure puisqu'il n'y a pas d'amortissement. La puissance propagée par l'onde est donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sqrt{T \mu} A^2 \omega^2. \quad (7.10)$$

7.4 Raccordement

Nous imaginons une corde qui par exemple par amincissement, passerait au point $x = 0$ d'une masse linéique μ_1 à gauche à une valeur μ_2 à droite. Supposons qu'un opérateur loin sur la gauche provoque une onde incidente

$$y_i = A_i \cos(\omega t - k_1 x), \quad (7.11)$$

où l'origine des temps est ajustée pour simplifier l'expression et où $k_1 = \omega/c_1$, $c_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ étant la vitesse sur la partie gauche. Il est facile de voir qu'on ne peut pas assurer la continuité du déplacement vertical de la corde et de sa dérivée (qui assure la continuité de la force) au moyen d'une seule onde transmise

$$y_t = A_t \cos(\omega t - k_2 x), \quad (7.12)$$

avec $k_2 = \omega/c_2$, $c_2 = \sqrt{T/\mu_2}$. Il est nécessaire d'introduire également une onde réfléchie

$$y_r = A_r \cos(\omega t + k_1 x), \quad (7.13)$$

de sorte que les équations de continuité s'écrivent

$$A_i + A_r = A_t, \quad k_1(A_i - A_r) = k_2 A_t, \quad (7.14)$$

et ont pour solution

$$A_t = A_i \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad A_r = A_i \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad (7.15)$$

soit

$$A_t = A_i \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad A_r = A_i \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad (7.16)$$

qui donnent bien $A_t = A_i$ et $A_r = 0$ en absence de discontinuité. Si l'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente ($A_t/A_i > 0$), ce n'est le cas pour l'onde réfléchie que si $k_2 < k_1$, sinon elle repart en opposition de phase. C'est un phénomène général, la lumière réfléchie de l'air sur l'eau est déphasée, mais la lumière réfléchie depuis le fond d'une piscine à la surface de l'eau ne l'est pas.

On peut vérifier que la puissance incidente se répartit entre puissance réfléchie et puissance transmise, soit aux facteurs communs près, voir (7.10),

$$\sqrt{\mu_1}A_i^2 = \sqrt{\mu_1}A_r^2 + \sqrt{\mu_2}A_t^2. \quad (7.17)$$

7.5 Ondes stationnaires

Nous considérons maintenant le cas d'une corde de *longueur finie* L , de $x = 0$ à $x = L$ ⁱ. Puisque la corde est fixée en ces points,

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \quad (7.18)$$

En superposant une onde progressive vers la droite et une vers la gauche, de même amplitude et en opposition à $x = 0$,

$$y(x, t) = \frac{a}{2} \cos(\omega t + \phi - kx) - \frac{a}{2} \cos(\omega t + \phi + kx) = a \sin(\omega t + \phi) \sin(kx), \quad (7.19)$$

on arrive à construire, pour toute fréquence ω , une onde qui s'annule en $x = 0$. La condition en $x = L$ impose

$$\sin(kL) = 0, \quad k = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots, \frac{n\pi}{L}, \dots \quad (7.20)$$

et donc des pulsations

$$\omega_n = n \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (7.21)$$

faite d'un fondamental ω_1 et de ses multiples entiers, qui correspondent aux *harmoniques*.

La relation (7.21) rappelle la dépendance observée vis-à-vis des paramètres de réglages : la tension de la corde permet au violoniste de retrouver l'accord, la longueur plus grande du violoncelle, grave, par rapport au violon aigu, la masse linéique plus importante des cordes graves du piano par rapport aux cordes des notes aiguës.

Les premiers modes sont représentés sur la figure, avec toujours $y(x, t)$ fortement exagéré pour la lisibilité, à un instant où les amplitudes sont extrémales. Pour le fondamental, les points de la corde sont en phase. Les harmoniques font apparaître des *nœuds* où l'amplitude est nulle, et des *ventres* où elle est la plus grande. Un violoniste voulant renforcer la première harmonique n'attaquera pas la corde au milieu, mais au 1/4 ou au 3/4 de la longueur.

i. Une origine au milieu, avec x variant de $-L/2$ à $+L/2$ est aussi envisageable, mais n'apporte pas de simplification dans les calculs

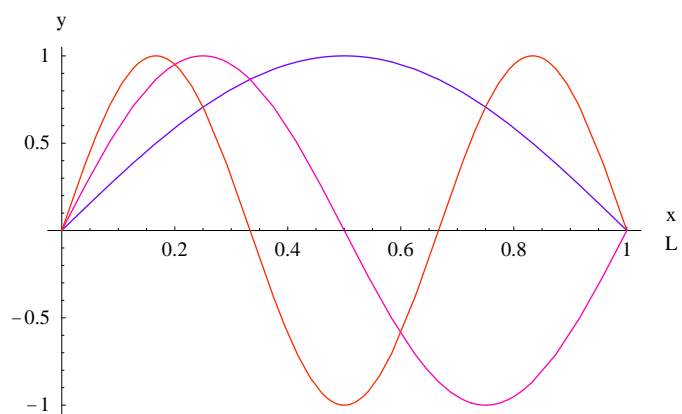


FIGURE 30 – Aspect de la corde (amplifié verticalement) à un instant d'élongation maximale, pour les trois premiers modes.

8 Ondes sonores

8.1 Introduction

Est présenté ici l'essentiel des ondes acoustiques. Les applications et les développements seront exposés dans le cours d'acoustique.

Il s'agit d'ondes mécaniques, comme dans le chapitre précédent, mais le mouvement de vibration est *longitudinal*, parallèle à la direction de propagation.

8.2 Pression et surpression

Dans un gaz, la pression est souvent assez élevée, de l'ordre de la pression atmosphérique, $P \simeq 10^5$ Pa. Quand une vibration est produite et se propage, elle est véhiculée par une surpression locale et dépendant du temps $p(x, t)$, avec $|p| \ll P$. Comme les phénomènes acoustiques sont très rapides, l'équilibre des températures n'est pas atteint. L'évolution d'un volume V est reliée à celle de la pression par la loi *adiabatique*

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0, \quad (8.1)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. La relation bien connue $PV^\gamma = C^{\text{te}}$ n'est pas nécessaire, qui requiert que γ soit constant sur une grande plage : sa forme différentielle au point de fonctionnement suffit, avec la valeur de γ en ce point.

8.3 Équation de propagation

Considérons un tube cylindrique de section S renfermant un gaz de pression P , température T et masse volumique μ . Imaginons une perturbation de l'état d'équilibre, qui fait que le point d'abscisse *au repos* x se retrouve en $x + u(x, t)$. Le volume Sdx devient $S(x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t))$, soit une variation relative $\partial u/\partial x$ et donc une surpression est donc $p = -\gamma P \partial u/\partial x$.

La loi de Newton pour cet élément de masse μSdx soumis aux forces $S(P + p(x, t))$ à gauche et $S(P + p(x + dx, t))$ à droite, s'écrit

$$\mu S dx \ddot{u}(x, t) = S(P + p(x, t)) - S(P + p(x + dx, t)) = -S dx \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (8.2)$$

soit

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\gamma P}{\mu} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (8.3)$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{\gamma P}{\mu} = \gamma \frac{RT}{M}, \quad (8.4)$$

où M est la masse molaire et T la température absolue, si on suppose une équation d'état de gaz parfait qui pour une mole prend la forme $P(M/\mu) = RT$.

L'air a une masse molaire $M = 29$ g moyenne entre l'oxygène et l'azote, selon leurs proportions respectives. À $t = 27^\circ\text{C}$ qui correspond à $T = 300^\circ\text{K}$, la vitesse du son est $c = 347$ m/s, en utilisant $R = 8,32$ SI et $\gamma = 1,4$ pour un gaz diatomique.

C'est beaucoup moins vite que pour la lumière, expliquant le décalage déjà mentionné entre la perception de la lumière et celle du son d'un éclair.

8.4 Raccordement de deux milieux

Le raisonnement est semblable à celui fait pour la transition entre deux cordes de densités différentes. Une onde sonore vient de $x = -\infty$ dans le milieu #1 qui va jusqu'à $x = 0$ où il laisse la place au milieu #2. Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont notées

$$s_i = a_i \cos(\omega t - k_1 x), \quad s_r = a_r \cos(\omega t + k_1 x), \quad s_t = a_t \cos(\omega t - k_2 x), \quad (8.5)$$

et la continuité de l'amplitude et de la pression donnent

$$a_i + a_r = a_t, \quad \gamma_1 k_1 (a_i - a_r) = \gamma_2 k_2 a_t, \quad (8.6)$$

d'où

$$a_r = a_i \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad a_t = a_i \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (8.7)$$

en termes de la quantité $Z_i = c_i \mu_i$ appelée « impédance acoustique » du milieu.

8.5 Considérations énergétiques

Voir cours d'acoustique.

8.6 Ondes sonores dans les solides

La relation $p = -\gamma P \partial u / \partial x$ rappelle la formulation $f = A \delta \ell / \ell$ de la loi des ressorts, vue au premier chapitre. Considérons un barreau solide, de module d'Young A , et notons $u(x, t)$ le très petit déplacement horizontal du point x . La force exercée au point x par la partie à droite de x sur la partie à gauche de x sera $A \partial u / \partial x$. Donc si on fait le bilan sur un segment compris entre x et $x + dx$, on aura

$$\lambda dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right], \quad (8.8)$$

où λ est la masse linéique, et en passant à la limite, on identifie une équation d'Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.9)$$

avec

$$c^2 = \frac{A}{\lambda}. \quad (8.10)$$

Grosso modo, le module d'Young des solides remplace le coefficient γ des transformations adiabatiques des solides.

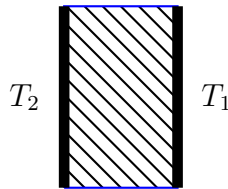
9 Ondes thermiques

9.1 Introduction

L'équation de la chaleur a été établie puis discutée par les plus grands savants, et a servi historiquement comme prototype d'équation de propagation et même d'équation aux dérivées partielles. En pratique, la propagation de la chaleur est omniprésente : refroidissement des moteurs, réchauffement climatique, protection des êtres vivants contre le chaud et le froid, etc.

9.2 Loi de Fourier–Newton

Imaginons un mur séparant un espace à droite à la température T_1 d'un autre à gauche à la température T_2 .



Si $T_1 < T_2$, un flux de chaleur (chaleur par unité de temps et par unité de surface) traverse le mur, et, en régime stationnaire, ce flux est proportionnel à la différence de température et inversement proportionnel à l'épaisseur du mur, soit

$$\Phi = \lambda \frac{T_2 - T_1}{e}, \quad (9.1)$$

ce qui constitue la *loi de Newton*, dont la version différentielle est

$$\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (9.2)$$

appelée *loi de Fourier*, qui a une généralisation spatiale

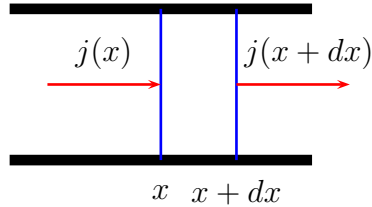
$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T, \quad (9.3)$$

où le vecteur gradient $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ guide le vecteur flux de puissance calorifique, \mathbf{j} , vers la plus forte variation de température, de même qu'en électrostatique, le vecteur champ électrique est perpendiculaire aux équipotentielles et s'oriente vers la plus forte décroissance du potentiel, ou sur une carte, les lignes de plus grande pente correspondent à la direction de plus forte variation d'altitude. Nous nous restreindrons cependant aux échanges thermiques à une dimension.

Le coefficient λ est appelé « coefficient de conduction » ou « conductibilité thermique » du matériau.

9.3 Régime stationnaire

Imaginons un tube parfaitement calorifugé, de section S .



Si $j(x)$ est le flux de puissance calorifique apportée de la gauche à la droite, on voit qu'à l'équilibre

$$j(x) = j(x + dx), \quad \text{soit } j(x) = C^{\text{te}}, \quad (9.4)$$

ce qui, associé à la loi de Fourier–Newton, indique que la température évolue *linéairement* le long du tube. Pour le mur que nous considérons plus haut, on aurait

$$T(x) = T_2 + \frac{x}{e} (T_1 - T_2), \quad (0 \leq x \leq e). \quad (9.5)$$

9.4 Régime dépendant du temps

Si la température évolue, le bilan d'énergie dit que le gain ou le déficit entre la chaleur reçue et celle transmise sert à chauffer ou refroidir la portion comprise entre x et $x + dx$. Soit c la capacité calorifique par unité de volume, ρ la masse volumique, dt un intervalle de temps. Le bilan calorifique est

$$Sj(x, t)dt - S(j(x + dx, t)dt) = Sdx \rho c dT, \quad (9.6)$$

soit avec la loi de Fourier, l'ensemble d'équations

$$j(x) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \frac{\partial j(x, t)}{\partial x}, \quad (9.7)$$

ce qui donne l'équation de propagation

$$\boxed{\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}}. \quad (9.8)$$

9.5 Solutions de l'équation de la chaleur

On pourra voir en TD le « choc thermique », qui consiste à appliquer en $x = 0$ une température constante T à une colonne semi-infinie ($x > 0$) initialement à une température T_0 et étudier comment, en chaque point, la température évolue de T_0 à T . Dans ce cas, on cherche une solution $T(x, t) = f(x/\sqrt{t})$ fonction d'une seule variable, établit l'équation différentielle satisfaite par f et la résout avec les conditions limites du problème.

Dans le contexte de ce cours sur les ondes, il est intéressant de chercher les solutions sinusoïdales. Imaginons un espace semi-infini ($x > 0$) auquel on impose en $x = 0$ une variation sinusoïdale de température $T(0, t) = b \cos(\omega t)$ autour d'une température moyenne que l'on prendra $T_m = 0$ pour simplifier.

En posant $a = \rho c / \lambda$, on est amené à chercher une solution complexe du type $\underline{T}(x, t) \propto \exp(i\omega t) \exp(kx)$ de l'équation $a \partial T(x, t) / \partial t = \partial^2 T(x, t) / \partial x^2$. On obtient

$$k^2 = ia\omega, \quad (9.9)$$

qui a pour solution ($z^2 = i$ a pour solution $z = \pm \exp(i\pi/4) = \pm(1+i)/\sqrt{2}$)

$$k = \pm \sqrt{a\omega} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad (9.10)$$

dont la partie imaginaire correspond à une propagation, et la partie réelle à une modification de l'amplitude en fonction de x . La propagation se déroule vers les $x > 0$ et physiquement, une atténuation, et non pas une amplification, est seule acceptable, deux raisons pour choisir le signe moins, soit

$$\underline{T}(x, t) = b \exp[i(\omega t - x\sqrt{a\omega/2})] \exp(-x\sqrt{a\omega/2}), \quad (9.11)$$

d'où la solution réelle

$$T(x, t) = b \exp(-x\sqrt{a\omega/2}) \cos(\omega t - x\sqrt{a\omega/2}). \quad (9.12)$$

Imaginons que x soit la profondeur dans le sol, et $2\pi/\omega = 1$ j, le signal $T(0, t) = b \cos(\omega t)$ décrivant les variations diurnes de température. La solution (9.12) reproduit bien deux observations :

1. l'amplitude du signal est amortie. Dans une grotte, la température varie très peu entre le jour et la nuit.
2. le signal se propage, ce qui induit un décalage. Si la température est maximale à 14 h au niveau du sol, le pic de température apparaîtra plus tard en profondeur.

Cet amortissement n'est pas la seule différence par rapport aux ondes mécaniques ou électromagnétiques solutions de l'équation d'Helmholtz $\partial^2 T(x, t) / \partial t^2 = c^2 \partial^2 T(x, t) / \partial x^2$, caractérisées par une vitesse de propagation *constante*, indépendant de ω . Ici la vitesse de propagation, $\omega / \text{Re}(k) \propto \sqrt{\omega}$ *dépend de la pulsation*.

Si par exemple, on considère la combinaison de deux signaux au sol

$$T(0, t) = b_1 \cos(\omega_1 t) + b_2 \cos(\omega_2 t), \quad (9.13)$$

qui pourraient être les variations diurnes ($2\pi/\omega_1 = 1$ j) et saisonnières ($2\pi/\omega_2 = 365$ j), on trouve en profondeur un signal doublement déformé :

1. le rapport entre les deux amplitudes est modifié, car le coefficient d'amortissement $\exp(-x\sqrt{a\omega/2})$ dépend de ω ,
2. la synchronisation (à $t = 0$ les deux cosinus sont maxima simultanément à $t = 0$) est perdue, car les deux signaux ne se propagent pas à la même vitesse.

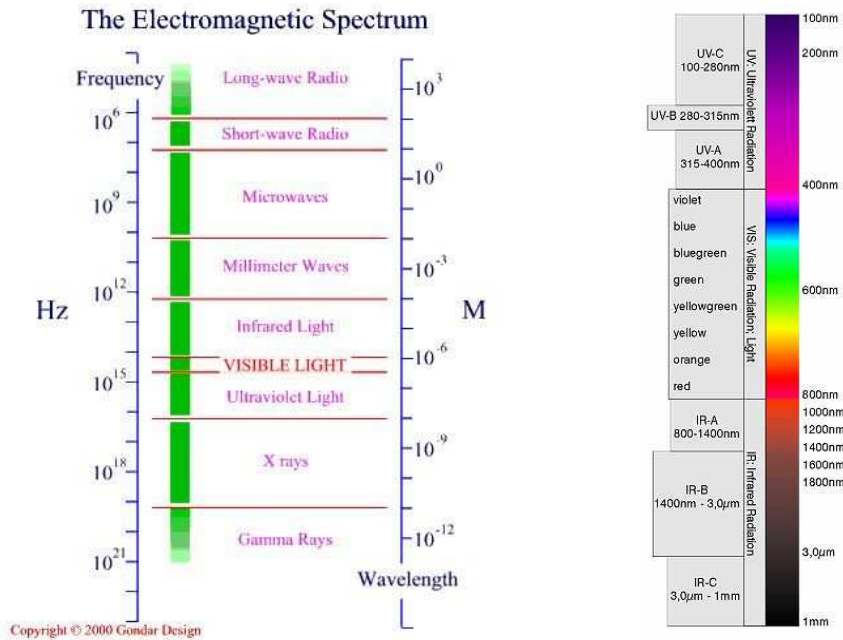
10 Ondes électromagnétiques

10.1 Introduction

Les ondes électromagnétiques sont présentes dans toutes les gammes de fréquence, depuis les ondes radios de longueur d'onde se comptant en kilomètres aux rayons γ dont la longueur d'onde s'exprime en fraction de 10^{-15} m.

Un domaine particulièrement est l'optique, avec λ de l'ordre du nm. La gamme des ondes optiques est récapitulée sur la figure, empruntée à l'excellent site

<http://www.purchon.com/physics/electromagnetic.htm>



Le spectre des ondes optiques est amplifiée sur la deuxième figure.

10.2 Équations de Maxwell

En régime statique, les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} sont indépendants. Ce n'est plus le cas en régime variable. Par exemple, les lois de l'induction indiquent qu'une variation du champ magnétique induit l'apparition d'un champ électrique, dit « électromoteur ». Par exemple un champ vertical B_z variable induit un champ électrique horizontal, radial, $E_r \propto \partial B_z / \partial t$ et quand on intègre sur une boucle, on retrouve la loi de Faraday $e = -\partial \Phi / \partial t$ exprimant la force électromotrice d'induction à la dérivée du flux du champ magnétique.

Au total, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} obéissent à un ensemble de relations linéaires couplées reliant leurs dérivées par rapport au temps et par rapport aux coordonnées. Ce sont les équations de Maxwell, qui sont exposées dans les cours d'électromagnétisme.

À l'aide de dérivations (dont on paiera le prix plus tard, voir les conditions de transversité) et de combinaisons linéaires, on peut établir que chaque composante $X(\mathbf{r}, t) =$

$E_x(\mathbf{r}, t), \dots B_z(\mathbf{r}, t)$ obéit à une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 X(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial X(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial X(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial X(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right], \quad (10.1)$$

qui, dans le cas d'une onde plane qui se propage le long de Ox se réduit à

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial X(x, t)}{\partial x^2}, \quad (10.2)$$

qui est l'équation de propagation déjà rencontrée pour la corde vibrante et pour le son, à la différence que la vitesse est ici

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (10.3)$$

de valeur $c \simeq 300\,000$ km/s. (Le fait que c soit reliée à des constantes fondamentales, et donc invariant par changement de référentiel a beaucoup intrigué et a conduit à l'élaboration de la théorie de la relativité.)

10.3 Ondes électromagnétiques

Les solutions de (10.2) sont les mêmes que celles établies pour la corde vibrante, soit

$$X(x, t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (10.4)$$

mais il y a des conditions supplémentaires pour satisfaire les équations de Maxwell originales, à savoir :

- les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation, et appartiennent donc au plan orthogonal, appelé « plan de polarisation », soit $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0$ où \mathbf{k} est le vecteur de module k orienté dans le sens de propagation, ici $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$;
- les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{k} forment un trièdre direct ;
- les normes satisfont $E = cB$;

ce qui peut se résumer par

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}/c. \quad (10.5)$$

10.4 Optique géométrique

Il s'agit de la propagation d'ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est petite par rapport aux dimensions géométriques qui interviennent. Les phénomènes d'interférence et de diffraction deviennent alors négligeables. Un rayon lumineux se propage en ligne droite, ou plus précisément selon le principe de Fermat, en minimisant le chemin optique pour aller de A à B ,

$$\int_A^B n \, ds, \quad (10.6)$$

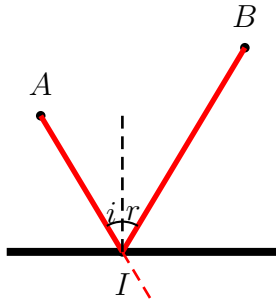
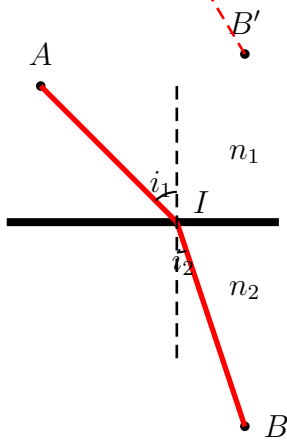
FIGURE 31 – Lois de Descartes pour la réflexion, $r = i$ 

FIGURE 32 – Lois de Descartes pour la réfraction.

où s est l'abscisse curviligne, et n est l'indice du milieu, qui vaut $n = c/v$, rapport de la vitesse de lumière dans le vide à celle dans le milieu.

Par exemple, la loi de Snell–Descartes de la réflexion, $r = i$ peut se démontrer en disant que le chemin minimal pour aller de A à B correspond à une ligne droite AB' de A au symétrique B' de B par rapport au plan du miroir.

Pour retrouver la loi de la réfraction, on calcule le chemin optique

$$L(x) = n_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \sqrt{(b-x)^2 + h_2^2}, \quad (10.7)$$

en fonction des coordonnées $A(0, h_1)$, $I(x, 0)$ et $B(b, h_2)$. La condition de minimum donne

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = n_2 \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + h_2^2}}, \quad (10.8)$$

qui n'est autre que le célèbre

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (10.9)$$

11 Effet Doppler

11.1 Introduction

C'est un phénomène familier. Une voiture de course qui arrive est perçue avec un bruit de moteur plus aigu, et s'éloigne dans le grave. Le pilote, s'il avait la possibilité – et l'envie – d'écouter une cigale dans le pré voisin, percevrait aussi une fréquence différente par rapport à celui qui fait la sieste à côté de la cigale.

11.2 Source en mouvement colinéaire

La source (S) émet avec une période T . Un premier top, émis à $t = 0$ est reçu au temps $t_1 = L/c$ par un détecteur (D) à la distance L , si c est la vitesse de propagation de l'onde. Si S est immobile, le deuxième top émis au temps T est reçu en $t_2 = T + L/c$ et D mesure une fréquence $t_2 - t_1 = T$, reflet fidèle de la source. Si S se *rapproche* avec une vitesse v , le deuxième top n'a à parcourir que $L - vT$ est donc perçu au temps $t_2 = T + (L - vT)/c$, si bien que D perçoit une fréquence

$$T' = T \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad (11.1)$$

Si S *s'éloigne*, on remplace v par $-v$ dans le bilan précédent, car le trajet s'allonge, et donc $T' = T(1 + v/c)$. On gardera donc (11.1) *algébriquement*, avec $v > 0$ si S se rapproche de D.

11.3 Détecteur en mouvement colinéaire

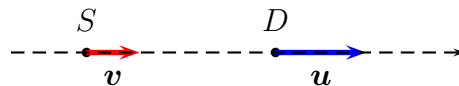
S est immobile, D en mouvement, avec une vitesse u qui le *rapproche*. Le top émis à $t = 0$ est reçu à $t_1 = L/c$, si L est la séparation au temps t_1 . Le top émis à T est perçu au temps t_2 , mais D, à cet instant, n'est plus qu'à une distance $L - |u|(t_2 - t_1)$, donc $t_2 = T + [L - |u|(t_2 - t_1)]/c$. La période perçue $T' = t_2 - t_1$ est

$$T' = \frac{T}{1 + |u|/c}, \quad (11.2)$$

et avec une convention d'orientation algébrique pour u , devient

$$T' = \frac{T}{1 - u/c}, \quad (11.3)$$

avec $u > 0$ pour un éloignement et $u < 0$ pour un rapprochement.



11.4 Combinaison

Le même raisonnement avec *simultanément* mouvement de S et de D, indique sans surprise que les deux facteurs se combinent, soit

$$T' = T \frac{1 - v/c}{1 - u/c}, \quad (11.4)$$

On peut s'étonner que u et v n'interviennent pas exactement par la combinaison $v - u$ ^j, car on pourrait naïvement argumenter que seul compte le mouvement *relatif* entre S et D.

En fait, une analyse du mouvement de D dans un référentiel en translation de vitesse $-u$ par rapport au référentiel original, révèle une situation où S a une vitesse $v - u$, D est immobile et *l'onde se propage à une vitesse $c - u$* . L'application de (11.1) avec ces ingrédients donne bien le résultat correct.

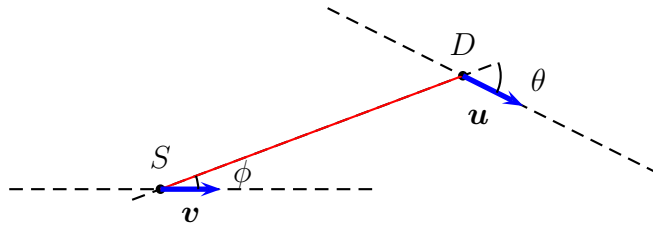
11.5 Mouvement non colinéaire

Analysons d'abord le cas où la ligne de visée, la ligne qui va propager le signal, est perpendiculaire à la vitesse de S. À ce moment-là, la distance entre S et D est stationnaire, et la durée de propagation entre deux tops successifs ne change pas. La fréquence est inchangée. On trouverait la même résultat pour S immobile et D se déplaçant perpendiculairement à la ligne de propagation qui lui transmet le signal.

Pour une vitesse quelconque, on a donc la possibilité de décomposer v en une composante v_{\perp} et une composante v_{\parallel} , perpendiculaire et parallèle à la ligne de propagation, et de même pour u . Si la ligne de séparation est orientée comme précédemment, avec $v_{\parallel} > 0$ pour un rapprochement et $u_{\parallel} > 0$ pour un éloignement, le résultat s'écrit

$$T' = T \frac{1 - v_{\parallel}/c}{1 - u_{\parallel}/c} = T \frac{1 - v \cos \varphi/c}{1 - u \cos \vartheta/c}, \quad (11.5)$$

si φ et ϑ sont les angles qui projettent v et u sur la ligne de propagation. En général, ces angles varient au cours du temps, et la fréquence T' change.

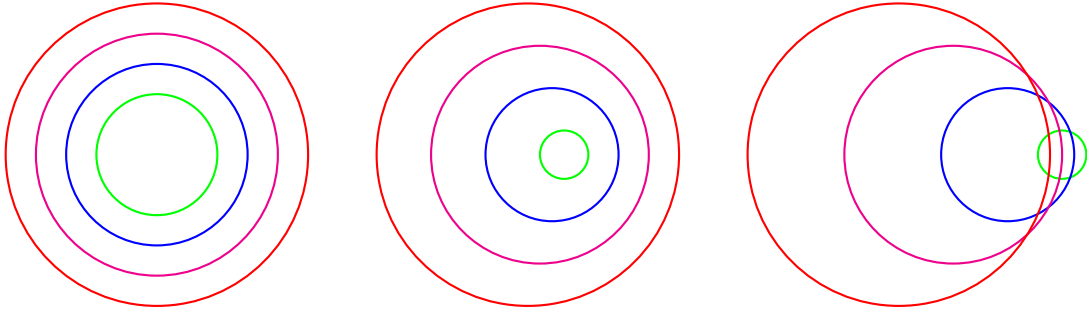


11.6 Mur du son

Imaginons un canard sur l'eau. Il barbote régulièrement, immobile. Les ondes se propagent à la surface de l'eau, en cercles exactement concentriques. L'amplitude s'atténue, et

j. C'est vrai seulement si on développe (11.4) au premier ordre en u/c

pas seulement à cause des frottements dus à la viscosité de l'eau. L'énergie se répartit sur un périmètre de plus en plus grand, et l'énergie par unité de longueur sur le cercle doit diminuer. Et l'amplitude des ondes est proportionnelle à la racine carrée de cette énergie par unité de longueur.

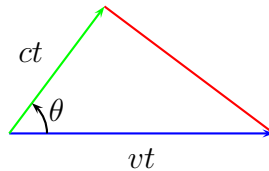


Si le canard se déplace lentement, les cercles ne sont plus concentriques mais restent intérieurs les uns aux autres. Voir figure. On retrouve l'effet Doppler précédent. Un observateur à l'avant du canard voit des signaux rapprochés. Un observateur à l'arrière voit des signaux plus espacés.

Si le canard se déplace plus vite que les ondes, les cercles ne sont plus enfermés les uns dans les autres. Ils forment un faisceau inscrit dans un triangle. La tangente commune est une ligne où les ondes émises à des temps différents sont en phase et donc s'ajoutent de manière cohérente. C'est l'onde de choc. L'inclinaison de la perpendiculaire à la ligne de choc, qui indique son sens de propagation, est θ telle que

$$\cos \theta = \frac{c}{v}, \quad (11.6)$$

qui d'ailleurs n'a de sens que si $v > c$.



Le spectacle des cercles enfermés dans un triangle, dont la pointe avance, est habituelle avec les bateaux rapides, type « hors-bord ». Dans l'espace, les cercles deviennent sphères et le triangle devient un cône, c'est le cas pour les avions qui ont dépassé « le mur du son ». Dans la direction θ donnée par (11.6), une onde se propage. Un observateur sur terre, quand l'onde arrive, reçoit simultanément les sons émis à plusieurs instants différents. C'est ce qui explique la concentration de puissance acoustique. Les avions n'ont le droit de dépasser le mur du son qu'à haute altitude et au-dessus de zones inhabitées.

11.7 Effet Cerenkov

Il peut paraître à première vue surprenant que l'effet « mur du son » ait un analogue en optique. On apprend en effet dans les cours de Relativité que nul mobile ne peut dépasser la vitesse de la lumière. C'est vrai effectivement dans le vide : un des grands changements apportés par la Relativité par rapport à la physique classique est que toute vitesse de particule massive est inférieure à c , la vitesse de la lumière, qui vaut environ 300 000 km/s.

Mais si un électron ou une autre particule chargée pénètre dans un milieu avec beaucoup d'énergie, il possède une vitesse v très peu inférieure à c et par inertie, la conserve au début de son trajet dans le milieu. Par contre la vitesse de la lumière *dans le milieu* est seulement c/n comme on l'apprend en Optique pour expliquer la signification physique de l'indice n , qui est tel que $n > 1$. Dans ces conditions, on peut avoir $v > c/n$.

Quand la particule chargée passe dans le milieu, elle excite les électrons périphériques des atomes, qui reviennent à leur état d'équilibre en émettant de la lumière. C'est l'analogue du son émis par un avion qui bouscule les couches d'air sur son passage. Si $v > c/n$, cette lumière se concentre dans un cône de demi-angle au centre

$$\cos \alpha = \frac{c}{nv}, \quad (11.7)$$

et la mesure de α , avec la précision extrême de l'optique, permet de remonter à la vitesse v de la particule chargée. C'est le principe des détecteurs à effet Cerenkov qui sont de plus en plus utilisés dans les expériences auprès des grands accélérateurs de particules.

12 Superposition de vibrations et d'ondes

12.1 Introduction

Ce chapitre contient une récapitulation de résultats déjà vus et quelques nouveaux.

12.2 Combinaison de vibrations de même fréquence

Ce problème a été rencontré, par exemple, pour regrouper la contribution d'une élongation initiale, $x_0 \cos(\omega t)$, et celle d'une vitesse initiale $(v_0/\omega) \sin(\omega t)$ en une seule vibration $A \cos(\omega t - \phi)$ d'amplitude A et de phase ϕ à l'origine.

Plus généralement, on peut avoir à considérer la superposition

$$a_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \dots + a_n \cos(\omega t + \phi_n), \quad (12.1)$$

l'exemple précédent correspondant à $n = 2$, $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = -\pi/2$.

Ce qu'il faut retenir c'est que le résultat est une simple sinusoïde : il n'y a qu'une pulsation en jeu. Soit

$$\sum_{i=1}^n a_i \cos(\omega t + \phi_i) = A \cos(\omega t + \Phi). \quad (12.2)$$

Le plus simple est de se placer en représentation de Fresnel. On a des vecteurs tournant à la même vitesse, rigidement liés, de coordonnées $\{a_i \cos \phi_i, a_i \sin \phi_i\}$ qu'il s'agit d'ajouter, d'où

$$\begin{cases} A \cos \Phi = a_1 \cos \phi_1 + \dots + a_n \cos \phi_n, \\ A \sin \Phi = a_1 \sin \phi_1 + \dots + a_n \sin \phi_n, \end{cases} \quad (12.3)$$

d'où on tire A et Φ . La méthode des complexes est bien-sûr très similaire, on pourra la faire à titre d'exercice.

12.3 Composition de deux vibrations de fréquences différentes

Soit la vibration composée (un choix d'horloge permet de neutraliser la première phase)

$$f(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (12.4)$$

La première question est de savoir si $f(t)$ est périodique. Du point de vue *mathématique*, c'est le cas s'il existe une pulsation Ω dont les deux pulsations sont des multiples entiers, soit

$$\omega_1 = n_1 \Omega, \quad \omega_2 = n_2 \Omega, \quad \omega_2/\omega_1 = n_2/n_1 = \text{rationnel}. \quad (12.5)$$

Du point de vue *pratique*, il y a deux écueils à cette définition. Si n_1 et n_2 sont grands, il faut attendre très longtemps avant de revoir $f(t)$ revenir à sa valeur. D'autre part, en physique, les nombres ne sont connus qu'avec une précision limitée, si bien qu'il ne peut être opposée de différence entre réel et rationnel. Par conséquent, $f(t)$ sera «effectivement» périodique s'il existe des entiers «petits» n_1 et n_2 tels que $\omega_1/n_1 \simeq \omega_2/n_2$.

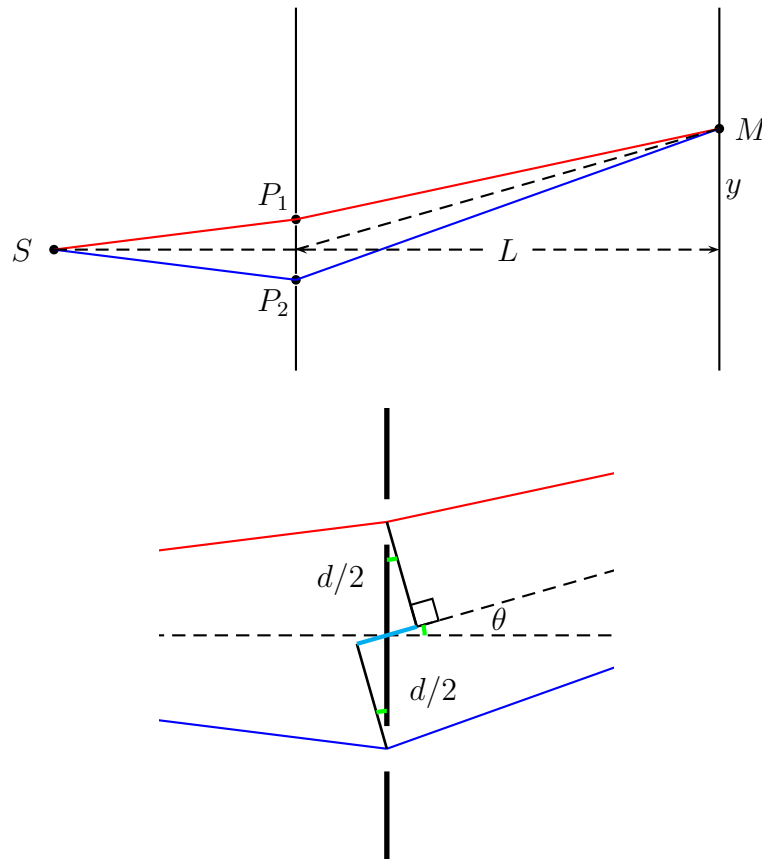
Le cas des *battements* a été rencontré plusieurs fois. Si $\omega_1 \sim \omega_2$, un signal « rapide » est observé, de pulsation $(\omega_1 + \omega_2)/2$, dont l'amplitude est modulée lentement, avec une pulsation $|\omega_2 - \omega_1|/2$.

12.4 Interférences

C'est un phénomène très important, historiquement pour avoir permis de mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière, et aussi pour les applications : les dispositifs interférentiels permettent des mesures de très haute précision.

12.4.1 Principe

Il est bien illustré par l'expérience des trous d'Young. Une onde, lumineuse ou acoustique^k, arrive simultanément sur deux trous d'une plaque, dont le diamètre est petit par rapport à la longueur d'onde. Les trous se comportent comme deux sources *synchrones* et on examine l'effet combiné de leurs émissions sur un point M d'un écran.



On voit sur la figure que si d est la distance entre les centres des trous, θ l'angle entre la direction d'observation OM (O est le milieu des centres des trous) et la normale au plan

k. Les ordres de grandeur des distances seront bien-sûr différents dans les deux cas

de l'écran, le rayon supérieur est raccourci de $d\theta/2$ par rapport à OM et le rayon inférieur plus grand de $d\theta/2$, et donc la différence entre ces deux rayons $\delta = \theta d = dy/L$ si y est l'ordonnée de M et L la distance entre le plan des trous et celui de l'écran ¹. Une différence de chemin δ correspond à un déphasage

$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi dy}{L\lambda}. \quad (12.6)$$

On doit donc ajouter en M les *amplitudes* $a \cos(\omega t)$ et $a \cos(\omega t + \phi)$. Si $\phi = 0$ ou $2n\pi$, on a une superposition cohérente, avec une amplitude double et donc une intensité *quadruple* de ce que produirait un trou unique. Entre les deux, pour $\phi = (2n + 1)\pi$, les amplitudes sont opposées, et l'intensité résultante est nulle. On a donc sur l'écran une alternance de franges horizontales éclairées et de franges sombres. La distance entre les franges, ou *interfrange* est

$$\Delta(y) = \frac{L\lambda}{d}. \quad (12.7)$$

Le phénomène ne va pas jusqu'à des $|y|$ très grands. Il faudrait des trous très petits et donc peu de lumière, pour avoir une diffraction vraiment totale. Si la lumière n'est pas monochromatique, les franges de différentes couleurs ne se superposent pas et le décalage s'accroît quand on s'éloigne de la frange centrale $n = 0$. Du point de vue temporel, les deux rayons qui se superposent en M ont été émis à des instants différents. Les valeurs possibles de ϕ sont limitées par le nombre de périodes pendant lesquelles la source émet de manière régulière. Les sources ordinaires fournissent des paquets d'oscillations sur quelques périodes seulement. Il faut un laser pour avoir une source qui puisse correspondre à une sinusoïde stable.

12.4.2 Dispositifs interférentiels

Les trous d'Young correspondent au cas le plus simple. L'analyse ci-dessus est limitée au plan de la figure. Sur l'écrans, une ligne d'éclairement maximal (ou minimal) correspond à différence de distance constante entre M et chacun des deux trous, soit des arcs d'hyperbole qui sont presque des droites au voisinage du point central H .

Des fentes parallèles sont comme des paires de trous qui ajoutent leurs effets, et donnent des franges plus lumineuses.

On a aussi des interférences possibles entre un rayon qui arrive directement et un autre qui a rebondi. Voir TD.

Un casque anti-bruit actif consiste à injecter un signal décalé de π qui neutralise le signal extérieur. Gare aux oreilles, évidemment si le déphasage passe de π à 2π par déficience de l'électronique.

1. On peut retrouver $\delta = dy/L$ en partant de l'expression exacte $\delta = \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2}$ et en faisant un développement limité, en gardant le terme dominant

12.5 Ondes stationnaires

Voir la fin du premier polycopié, notamment les considérations d'énergie.. Bien comprendre qu'il s'agit d'une interférence entre une onde se propageant vers les $x > 0$ et une autre allant vers les $x < 0$. La première, proportionnelle à $\cos(\omega t - kx + \phi)$, avec $\omega/k = c$, peut s'écrire après un choix de l'origine des temps

$$s_1 = (a/2) \cos(\omega t - kx) , \quad (12.8)$$

et si l'on superpose $s_2 = -(a/2) \cos(\omega t + kx)$ à s_1 , on trouve

$$s(x, t) = s_1 + s_2 = a \sin(\omega t) \sin(kx) , \quad (12.9)$$

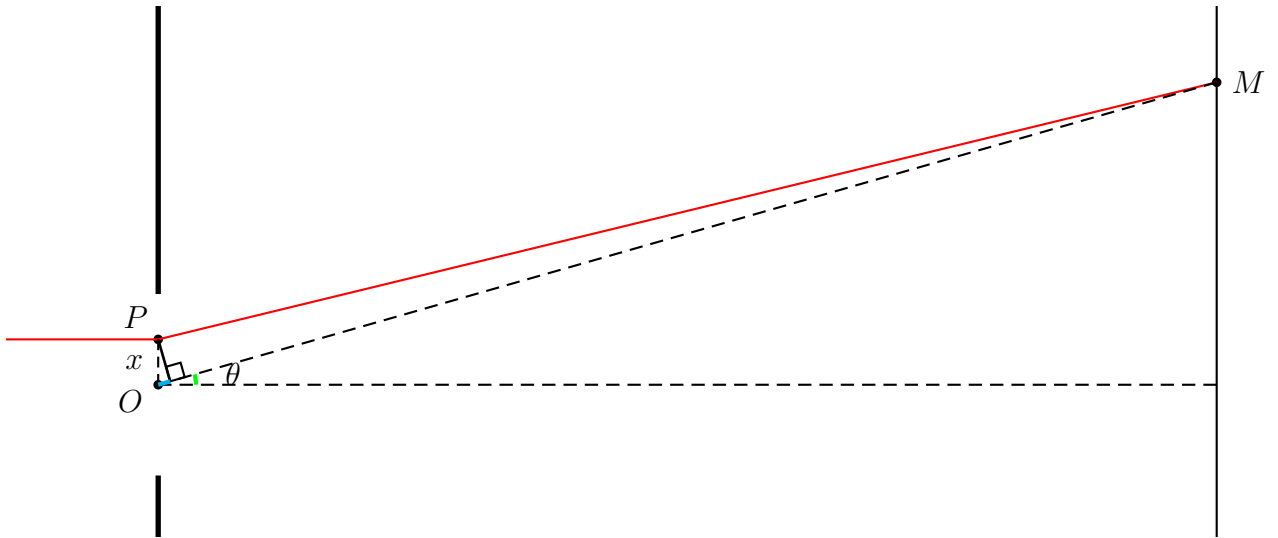
ce qui démontre, comme pour le cas d'un nombre fini d'oscillateurs, qu'on peut toujours satisfaire la condition limite à gauche, $s(0, t) = 0$, sans encore restreindre le choix de la pulsation. C'est en annulant s à l'autre extrémité, $s(L, t) = 0$, que l'on obtient les pulsations propres de la corde.

Il faut aussi souligner que le problème est très général. Outre les modes propres des oscillations transverses mécaniques d'une corde de violon, on peut citer les modes propres des oscillations longitudinales d'une colonne d'air dans un instrument à vent, ou les ondes électromagnétiques stationnaires dans la cavité d'un four micro-onde.

12.6 Diffraction

Le phénomène observé est le suivant. Si une onde (sonore, lumineuse, etc.) passe par un trou dans une paroi opaque, la vibration se propage en général dans le cône issu de la source et s'appuyant sur le bord du trou. C'est le cas si les dimensions du trou sont grandes par rapport à la longueur d'onde. Si la taille du trou est du même ordre que la longueur d'onde, la vibration déborde du cône. En photographie, par exemple, le cliché devient flou si le diaphragme de l'objectif est trop étroit. Si le trou devient très petit (par rapport à la longueur d'onde) la vibration sort presque isotropiquement du trou. Dans une pièce éclairée par un soleil levant horizontal, on voit l'image géométrique des montants de la fenêtre ; mais s'il y a des rideaux en tulle légère, la lumière est agréablement diffusée dans toute la pièce.

L'explication réside sur le principe de Huyghens–Fresnel. Quand la vibration arrive sur le trou, chaque point se comporte comme une source ponctuelle qui émet immédiatement dans toutes les directions. La lumière qui atteint un point donné résulte de la superposition de toutes ces ondes secondaires.



Imaginons un trou sur une plaque verticale, éclairé horizontalement par une source située très loin sur la gauche. Les points du trou émettent en direction de M , loin dans la direction θ . La référence est le rayon OM issu du centre du trou. Le rayon issu de P est décalé d'une longueur $x\theta$ qui correspond à un déphasage $\delta = 2\pi x\theta/\lambda$.

- Si le trou est large, dès que $\theta \neq 0$, δ varie de 0 à π , 2π , 3π , etc. Autrement dit, les rayons issus des différents points interfèrent avec des phases de toute valeur, et la résultante est nulle. On n'a une vibration non nulle que pour $\theta = 0$. C'est l'approximation de l'optique géométrique.
- Si le trou est petit, et θ petit, les rayons sont tous à peu près en phase, l'interférence est globalement constructive, et de la lumière arrive en M . On a de la diffraction, et donc un écart par rapport à l'optique géométrique.

Le calcul de l'intensité en M donne lieu à des intégrales un peu difficiles.^m Il faut surtout retenir l'explication qualitative du phénomène de diffraction.

m. De nouvelles fonctions, comme la fonction d'Airy, ont été inventées pour exprimer le résultat de ces intégrales, de même que le logarithme permet d'exprimer la valeur d'une intégrale sur $1/x$.

A Rappels mathématiques

A.1 Introduction

Suivre ce cours requiert quelques mises à jour en trigonométrie, en privilégiant les représentations géométriques et la représentation par complexes, sans oublier les équations trigonométriques comme $\sin x = a$ ou $a \cos x + b \sin x = c$.

Les équations différentielles $y'^2 + \omega^2 y^2 = a^2 \omega^2$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ sont indispensables, ainsi que les généralisations avec amortissement ou second membre.

A.2 Trigonométrie

A.2.1 Fonctions de base

Fonction $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Graphe. Parité. Période. Interprétation géométrique, dans un triangle rectangle, sur le cercle unité.

A.2.2 Relations entre elles

La plus importante est

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (\text{A.1})$$

et ses variantes

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad (\text{A.2})$$

A.2.3 Formules classiques de transformation

Savoir compléter :

$$\sin(-x) = \dots \quad \cos(-x) = \dots \quad \tan(-x) = \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \dots \quad \cos(\pi/2 - x) = \dots \quad \tan(\pi/2 - x) = \dots \quad (\text{A.4})$$

$$\sin(\pi/2 + x) = \dots \quad \cos(\pi/2 + x) = \dots \quad \tan(\pi/2 + x) = \dots \quad (\text{A.5})$$

$$\sin(\pi - x) = \dots \quad \cos(\pi - x) = \dots \quad \tan(\pi - x) = \dots \quad (\text{A.6})$$

$$\sin(\pi + x) = \dots \quad \cos(\pi + x) = \dots \quad \tan(\pi + x) = \dots \quad (\text{A.7})$$

$$\sin(a + b) = \dots \quad \cos(a + b) = \dots \quad \tan(a + b) = \dots \quad (\text{A.8})$$

$$\sin(a - b) = \dots \quad \cos(a - b) = \dots \quad \tan(a - b) = \dots \quad (\text{A.9})$$

$$\sin a \sin b = \dots \quad \cos a \cos b = \dots \quad \cos a \sin b = \dots \quad (\text{A.10})$$

$$\sin(2x) = \dots \quad \cos(2x) = \dots \quad \tan(2x) = \dots \quad (\text{A.11})$$

$$d \sin x / dx = \dots \quad d \cos x / dx = \dots \quad d \tan x / dx = \dots \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^x \sin u \, du = \dots \quad \int_0^x \cos x \, dx = \dots \quad (\text{A.13})$$

Bien remarquer que $(\cos x)' = \cos(x + \pi/2)$ et $(\sin x)' = \sin(x + \pi/2)$, que l'on peut résumer en $[\exp(ix)]' = i \exp(ix)$

A.3 Nombres complexes

A.3.1 Représentation cartésienne et trigonométrique

Passer de $z = x + iy$ à $z = r \exp(i\vartheta)$ et vice-versa.

Que vaut $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$?

Que vaut $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n$?

A.3.2 Fonctions complexes et équations linéaires

Si $z(t) = x(t) + iy(t)$, où x et y sont réels, est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients réels

$$A(t)\ddot{u} + B(t)\dot{u} + C(t)u = 0, \quad (\text{A.14})$$

pouvez-vous trouver des solutions réelles ?

A.3.3 Équation $y'' + \omega^2 y^2 = a^2$

Cette équation n'a pas uniquement vocation à être dérivée, ce qui fait perdre de l'information. Elle est très réminiscente de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vérifier que $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ est solution.

A.4 Équations linéaires du second ordre

A.4.1 Résultats généraux

Soit

$$A(t)\ddot{u} + B(t)\dot{u} + C(t)u = 0. \quad (\text{A.15})$$

Montrer que si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ est solution, il en est de même de toute combinaison linéaire.

On suppose que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ont les caractéristiques suivantes à $t = 0$

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1. \quad (\text{A.16})$$

Quelle est la solution qui correspond à une position x_0 et une vitesse v_0 à $t = 0$?

Quelle est la solution qui correspond à une position x_0 et une vitesse v_0 à $t = t_0$?

A.4.2 Cas des équations à coefficients constants

On suppose $A \neq 0$ et on se ramène à

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Cu = 0. \quad (\text{A.17})$$

Pour $B = 0$, on a des solutions $u \propto \cos(\omega t)$ ou $u \propto \sin(\omega t)$ ou $u \propto \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega^2 = C$, si $C > 0$.

Si $B = 0$ et $C < 0$, les solutions sont en $u = \text{sh}(\alpha t)$ ou $u \propto \text{ch}(\alpha t)$ ou une combinaison, avec $\alpha^2 = -C$. ce sont des solutions qui «explosent», par contraste avec les solutions trigonométriques précédentes, qui restent bornées. On peut le voir directement sur l'équation. Si

$C > 0$, quand $y > 0$, la fonction a une concavité négative, ce qui tendance à la rabattre sur l'axe horizontal. Si on avait $C < 0$, la concavité serait positive, ce qui accélère la croissance de la fonction vers $+\infty$. Quand on établit une équation différentielle de ce type par un bilan mécanique ou électrique, on peut donc détecter immédiatement une erreur de signe sur C .

Si $B \neq 0$, on peut chercher des solutions exponentielles puis les combiner pour linéairement pour construire les solutions physiques. Pour que $u = \exp(rt)$ soit solution de l'équation différentielle, il faut que r soit solution de l'équation dite «caractéristique»

$$r^2 + Br + C = 0 . \quad (\text{A.18})$$

Les systèmes oscillant, nous venons de le voir, correspondent à $C > 0$. On voit que si $B < 0$, on aurait soit deux racines réelles positives, soit deux racines complexes conjuguées avec partie réelle positive. Dans les deux cas, on aurait des exponentielles dont le module diverge, ce qui ne traduit pas un amortissement. Les systèmes physiques avec oscillations amorties ou retour rapide vers le repos sont donc caractérisés par $C > 0$ et $B > 0$. De nouveau, l'occasion de vérifier les signes quand on établit l'équation du mouvement.

Si $B^2 - 4C < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées que l'on peut écrire $r = -B/2 \pm i\sqrt{4C - B^2} = -\lambda \pm i\omega$ et donc $u(t)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(-\lambda t)(a \exp(\omega t) + b \exp(-\omega t)) \\ &= \exp(-\lambda t)(a' \cos(\omega t) + b' \sin(\omega t)) \\ &= \exp(-\lambda t) a'' \cos(\omega t + \varphi) . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Il s'agit d'oscillations amorties.

Si $B^2 - 4C > 0$, on a deux solutions réelles négatives que l'on peut écrire $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$, et $u(t)$ peut s'écrire

$$u(t) = \alpha \exp(-\lambda_1 t) + \beta \exp(-\lambda_2 t) , \quad (\text{A.20})$$

qui ne s'annule qu'au plus une fois entre l'instant $t = t_0$ de départ et $t \rightarrow +\infty$.

A.4.3 Équations linéaires avec second membre

A.4.4 Généralités

Soit

$$A(t)\ddot{u} + B(t)\dot{u} + C(t)u = F(t) . \quad (\text{A.21})$$

On suppose que $u_0(t)$ est solution de cette équation. Montrer que $u(t) - u_0(t)$ est solution de l'équation homogène.

En déduire le résultat classique : la solution générale de (A.17) est obtenue en ajoutant la solution la plus générale de l'équation homogène associée à uneⁿ solution particulière de l'équation complète.

n. Ne pas dire *la* solution particulière si vous ne savez pas caractériser ce qui la différencie des autres. On peut parler, par exemple, de *la* solution périodique.

A.4.5 Recherche d'une solution particulière

Dans 99% des cas de la physique élémentaire, on devine la forme d'une solution particulière et on ajuste les coefficients qu'elle contient par identification.

Par exemple, pour résoudre

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = \exp(\alpha x) , \quad (\text{A.22})$$

on cherche une solution $y_0(x) = a \exp(\alpha x)$ et par identification, on trouve que le coefficient a doit satisfaire

$$a(\alpha^2 + \alpha + 1) = 1 , \quad (\text{A.23})$$

qui a une solution unique, sauf si α est solution de l'équation caractéristique.

Si on connaît une solution de l'équation homogène, soit $w(t)$, on peut chercher à résoudre (A.21) sous la forme $u(t) = g(t)w(t)$ et en reportant, on trouve que g' est solution d'une équation du premier ordre. On a donc simplifié le problème.

Si on connaît deux solutions de l'équation homogène, soit y et z , ce qui signifie que cette équation homogène est parfaitement résolue, alors on peut chercher $u = gy + hz$, et comme cela ne définit pas les fonctions inconnues g et h , on peut imposer en plus que $u' = gy' + hz'$, ce qui implique $g'y + h'z = 0$. En reportant dans l'équation différentielle, on aboutit au système d'équations

$$\begin{aligned} g'y + h'z &= 0 , \\ A(g'y' + h'z') &= F , \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

d'où on peut extraire g' et h' et donc g et h par simple intégration. Le terme constant arbitraire, dans cette intégration, génère bien une solution quelconque de l'équation homogène.

A.4.6 Existence d'une solution stationnaire

Considérons une équation d'oscillations forcées à coefficients constants

$$Ay'' + By' + Cy = F(x) , \quad (\text{A.25})$$

avec $B > 0$ et $C > 0$, ce qui signifie soit amortissement rapide, soit oscillations amorties pour l'équation homogène. On suppose que F est *périodique*, pas forcément sinusoïdal, soit $F(x+T) = F(x), \forall x$. Soit $u(x)$ une solution. On voit que $u(x+T)$ est aussi solution, donc

$$u(x+T) - u(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow \infty , \quad (\text{A.26})$$

car c'est une solution de l'équation homogène. Cela signifie que $u(x)$ est asymptotiquement périodique. Par le même raisonnement, on montre qu'un autre solution $w(x)$ se rapproche de $u(x)$ quand $x \rightarrow \infty$. On a donc démontré que toutes les solutions convergent vers une solution périodique qui est indépendante des conditions initiales. C'est la solution stationnaire du problème.

B Méthode de la transformée de Laplace

B.1 Introduction

Nous donnons ici quelques notions sur la transformée de Laplace et son application aux équations différentielles rencontrées, ce qui permettra aux étudiants de faire le lien avec le cours d'automatique.

B.2 Définition et propriétés générales

Sous réserve que l'intégrale existe, on définit la transformée de Laplace (TL) d'une fonction comme

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad (\text{B.1})$$

C'est une transformation linéaire, donc la TL d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire de TL. Les exemples suivants serviront un peu plus loin :

$$\begin{array}{ll} f & F \\ 1 & \frac{1}{p}, \\ \exp(at) & \frac{1}{p-a}, \\ \exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & \frac{1}{p-i\omega t} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}, \\ f'(t) & pF(p) - f(0), \\ f''(t) & p^2F(p) - pf(0) - f'(0). \end{array} \quad (\text{B.2})$$

B.3 Oscillateur non amorti

Il faut résoudre

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (\text{B.3})$$

La TL vérifie

$$p^2 X(p) + \omega^2 X(p) = px_0 + \dot{x}_0, \quad (\text{B.4})$$

soit

$$X(p) = \frac{x_0 p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}_0}{p^2 + \omega^2}, \quad (\text{B.5})$$

soit, en lisant (B.2) de droite à gauche,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad (\text{B.6})$$

déjà obtenu par d'autres méthodes.

B.4 Oscillateur amorti

Il s'agit de résoudre

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (\text{B.7})$$

La TL est donnée par

$$(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)X(p) = px_0 + \dot{x}_0 + 2\alpha x_0. \quad (\text{B.8})$$

Si on est en régime de décroissance exponentielle, soit $\alpha > \omega_0$, le polynôme de gauche se met sous la forme $(p - p_1)(p - p_2)$ où les racines p_1 et p_2 sont négatives (sinon, il s'agit de nombre complexes, mais le calcul se poursuit à l'identique). La solution est de la forme

$$X(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2}, \quad (\text{B.9})$$

et on retrouve

$$x(t) = A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t), \quad (\text{B.10})$$

mais on peut expliciter les résidus en fonction des conditions initiales et obtenir

$$A_1 = \frac{p_1 x_0 + \dot{x}_0 + 2\alpha x_0}{p_1 - p_2}, \quad (\text{B.11})$$

et bien-sûr, A_2 par $1 \leftrightarrow 2$.

B.5 Oscillations forcées

Si on considère l'équation d'évolution

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = g(t), \quad (\text{B.12})$$

on voit qu'il suffit d'ajouter à la TL précédente le terme dû à $g(t)$. Si $G(p)$ dénote sa TL, on aura au total

$$X(p) = \frac{px_0 + \dot{x}_0 + 2\alpha x_0 + G(p)}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}. \quad (\text{B.13})$$

Prenons le cas particulier d'une excitation sinusoïdale, qui est la partie réelle de $\underline{g}(t) = g_m \exp(i\omega t)$, correspondant à $G(p) = g_m/(p - i\omega)$. La solution précédente peut se décomposer en

$$X(p) = \frac{\underline{g}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \frac{1}{p - i\omega} + \text{termes réguliers en } p = i\omega, \quad (\text{B.14})$$

ce qui correspond à

$$x(t) = \underline{x}_m \exp(i\omega t) + \text{termes décroissants}. \quad (\text{B.15})$$

On retrouve bien la structure de la solution, et pour la partie stationnaire, l'amplitude complexe

$$\underline{x}_m = \frac{\underline{g}_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega}, \quad (\text{B.16})$$

qui permet de retrouver l'amplitude et le déphasage du régime stationnaire de l'excitation $g_m \cos(\omega t)$.

B.6 Oscillations couplées

Reprenons l'exemple de deux ressorts avec un couplage par élasticité. Il faut résoudre

$$\ddot{x}_1 + (k_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + (k_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0. \quad (\text{B.17})$$

Les TL sont données par

$$\begin{aligned} (p^2 + k_1 + K) X_1(p) - K X_2(p) &= px_{1,0} + \dot{x}_{1,0}, \\ -K X_1(p) + (p^2 + k_2 + K) X_2(p) &= px_{2,0} + \dot{x}_{2,0}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

avec les conditions initiales $x_{1,0}, \dots, \dot{x}_{2,0}$. À première vue, il suffit de résoudre, puis de prendre les TL inverses.

Il faut se souvenir que pour un système d'équations linéaires couplées

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = b_1, \quad a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = b_2, \quad (\text{B.19})$$

la solution est un rapport de déterminant, par exemple

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (\text{B.20})$$

Il faut donc connaître la factorisation du dénominateur, soit $(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)$, de manière à pouvoir écrire la solution comme

$$X_1(p) = \frac{\alpha_1 p + \beta_1}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{\alpha_2 p + \beta_2}{p^2 + \omega_2^2}, \quad (\text{B.21})$$

et l'analogie pour $X_2(p)$, et déduire

$$x_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) + (\beta_1/\omega_1) \sin(\omega_1 t) + \alpha_2 \cos(\omega_2 t) + (\beta_2/\omega_2) \sin(\omega_2 t). \quad (\text{B.22})$$

Il n'y pas de miracle : il faut là aussi chercher les valeurs propres de cette matrice 2×2 pour faire apparaître les pulsations propres du système.

B.7 Bilan

Cette méthode de la transformée de Laplace est évidemment très puissante, mais elle requiert une certaine dextérité pour la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Sinon, tout le bénéfice est perdu.