EXAMEN DE MARS 2006, CORRIGÉ SOMMAIRE

1 Coups sur une paroi

a) $mv_q^2/2 = kT/2$, soit $v_q = \sqrt{RT/M} \simeq 238$ m/s

b) Une particule de $v_x > 0$ frappera un élément S de la paroi verticale droite entre t et $t + \mathrm{d}t$ si elle est initialement contenue dans un cylindre (oblique, en général) de base S et de hauteur $v_x \mathrm{d}t$. Ces particules sont en nombre ($\mathcal{N}$ étant le nombre d'Avogadro et $V = 22,4$ l)

$$S v_x \mathrm{d}t \, \mathcal{N}/V \ ,$$

soit, par unité de surface et par unité de temps,

$$\bar{v}_x \mathcal{N}/V \simeq 3,68\,10^{27} \text{ coups par seconde et m}^2 \ ,$$

si on prend $(\bar{v}_x)^2 = v_q^2/3$.

c) En unités de $\sqrt{kT/m} = \sqrt{RT/M}$, les vitesses moyenne et quadratique moyenne sont

$$v_m = I_3/I_2 \simeq 1.12 \ , \qquad v_q = \sqrt{I_4/I_2} \simeq 1.22$$

soit une erreur d'environ 10%.

2 Équilibre d'une étoile à neutrons

a) $\boldsymbol{g} = -GM\hat{r}/r^2$ le vecteur unitaire radial centrifuge.

b) L'équation de l'hydrostatique se traduit par

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\varrho GM}{r^2} \ ,$$

soit

$$\frac{2}{3}\varrho^{-1/3}\mathrm{d}\varrho = -\frac{2}{5}\frac{GM\mathrm{d}r}{r^2} \ ,$$

soit

$$\varrho^{2/3} = \frac{2}{5}\frac{GM}{r} \ ,$$

car $\varrho \to 0$ si $r \to \infty$.

c) À la limite de température nulle, la densité est une fonction en escalier. On a vu dans le cours que l'énergie moyenne par particule est $\bar{\epsilon}3\mu/5$, que la pression est (de manière très générale pour un gaz parfait) $P = 2\varrho\bar{\epsilon}/3$, et que $\varrho \propto \mu^{3/2}$.

3 Modèle de ressort (environ 30% des points)

a) $L \equiv N\bar{\ell} = ia - (N-i)a = (2i - N)a$.

b) C'est le travail de la force.

c)

$$p_d = \exp(-\beta Fa)/Z \ , \qquad p_r = \exp(\beta Fa)/Z$$

si on choisit de symétriser les énergies, soit

$$p_d = \frac{\exp(-\beta F a)}{\exp(\beta F a) + \exp(-\beta F a)} \,, \qquad p_r = \frac{\exp(\beta F a)}{\exp(\beta F a) + \exp(-\beta F a)} \,.$$

d)

$$\bar{\ell} = a p_d - a p_r = a\,\mathrm{th}(\beta F a) \,.$$

e) Si $T \to 0$, $L \to Na$. Si $T \to \infty$, $L \to 0$.

f) Dans ce dernier cas, $L \simeq N\beta F a^2$. On retrouve la relation de Hookes et on peut identiifer la raideur du ressort.