

**Mécanique du point
et des systèmes matériels
Version préliminaire sans garantie**

DEUG SMA2 2003–04, module PHYS-SP32

Jean-Marc Richard

Version du 2 novembre 2003

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Avertissement	5
1.2	Contenu	5
1.3	Révisions et notions nouvelles	6
1.4	Révisions de mécanique du point	6
1.5	Ce qu'il faudra retenir	8
2	Systèmes de deux ou plusieurs particules	9
2.1	Introduction	9
2.2	Centre de masse	9
2.2.1	Définition	9
2.2.2	Exemples	10
2.2.3	Propriétés du centre de masse	10
2.2.4	Référentiel du centre de masse	11
2.3	Décomposition des vitesses et accélérations	11
2.4	Décomposition de König de l'énergie cinétique	11
2.5	Équation de Newton pour deux particules en interaction	13
2.6	Théorème du centre de masse	14
2.7	Premières applications	14
2.7.1	Ressort à deux masses, mouvement rectiligne horizontal	14
2.7.2	Ressort à deux masses, mouvement vertical sous l'influence de la pesanteur	15
2.7.3	Ressort à deux masses en mouvement rectiligne, forces extérieures constantes	15
2.7.4	Oscillations couplées	16
3	Desintégrations et chocs	18
3.1	Introduction	18
3.2	Choc élastique, choc inélastique	18
3.3	Le choix du référentiel	19
3.4	Désintégration à l'arrêt en deux corps	19
3.5	Désintégration en deux corps d'une particule en mouvement	20
3.6	Désintégration à trois corps	21

3.6.1	Limites des énergies individuelles	21
3.6.2	Diagramme de Dalitz	22
3.7	Collision élastique symétrique	24
3.8	Collision inélastique symétrique	24
3.9	Collision élastique projectile sur cible, masses égales	24
3.10	Collision élastique projectile sur cible, masses quelconques	26
3.10.1	Condition de rebond	26
3.10.2	Discussion générale	26
3.11	Collision inélastique	27
3.12	Exemple de choc inélastique	28
3.13	Démonstration de la loi de Dalton	28
3.14	Mouvement d'une fusée	30
4	Moment cinétique d'un système de points	32
4.1	Introduction	32
4.2	Moment cinétique pour un point matériel	32
4.3	Application au pendule simple	33
4.3.1	Mouvement de rotation	33
4.3.2	Pendule dans un plan vertical	34
4.4	Décomposition de König du moment cinétique	34
4.5	Lois d'évolution du moment cinétique	34
5	Rappels sur les forces centrales	37
5.1	Définition	37
5.2	Forces centrales et forces keplériennes	37
5.3	Mouvement plan	38
5.4	Loi des aires	38
5.5	Potentiel effectif et discussion qualitative des trajectoires	39
5.6	Équations de Binet	40
5.7	Cas du potentiel harmonique	43
5.8	Diffusion par un centre de forces	43
5.9	Stabilité des orbites	46
5.10	Problème inverse	46
6	Mouvement keplerien à centre fixe	47
6.1	Quelques rappels sur les coniques	47
6.1.1	Ellipse	47
6.1.2	Parabole	48
6.1.3	Hyperbole	48
6.2	Historique : lois de Kepler	48
6.3	Démonstration des lois de Kepler	49
6.4	Vecteur de Lenz	50
6.5	Loi horaire	51

6.6	Balistique spatiale	52
6.7	Diffusion coulombienne	54
7	Mouvement Keplerien à deux corps	57
8	Problème de Kepler à trois corps	59
8.1	Configurations de Lagrange	59
8.1.1	Rotation symétrique	59
8.1.2	Dilatation symétrique	60
8.1.3	Généralisation à des masses différentes	60
8.1.4	Le problème restreint à trois corps	60
8.2	Envoyer une sonde hors du système solaire	60
8.2.1	Première solution	60
8.2.2	Que penser de cette première solution ?	61
8.2.3	Deuxième solution	61
9	Le rôle des conditions initiales	63
9.1	Introduction	63
9.2	Système linéaire amorti excité extérieurement	64
9.3	Mouvement harmonique	64
9.4	Mouvement dans un champ coulombien	65
9.5	Pendule amorti excité extérieurement	65
10	Notions de mécanique relativiste	67
10.1	Introduction	67
10.2	Rappels de mécanique newtonienne	67
10.3	Lois du mouvement en Relativité	68
10.3.1	Nouvelle définition des grandeurs dynamiques	68
10.3.2	Unités	70
10.3.3	Rapidité et autres variables utiles	71
10.3.4	Cas des particules de masse nulle	71
10.4	Particule chargée dans un champ électrique	72
10.4.1	Vitesse initiale nulle	73
10.4.2	Vitesse initiale transverse	73

Chapitre 1

Introduction

1.1 Avertissement

Ce cours est mis à disposition sans aucune garantie. Les lecteurs peuvent me signaler les coquilles qu'ils ne manqueront pas de relever. Le texte sera modifié et mis à jour régulièrement.

La mise à disposition de ce texte sur Internet et en salle de lecture, «geste dont on appréciera le caractère philanthropique»¹, car allant au-delà des obligations des enseignants, ne saurait évidemment être perçu comme un encouragement à désertier les amphis et salles de TD, lieux privilégiés pour poser des questions.

1.2 Contenu

Ce cours propose des révisions et compléments à la mécanique du point déjà étudiée au lycée et en première année, et une introduction à la mécanique des systèmes matériels.

Un chapitre essentiel sera celui sur les systèmes de deux points matériels. Ce qu'il faut comprendre, c'est que pour déterminer l'évolution temporelle des vecteurs de position $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$, il s'avère souvent utile d'étudier deux combinaisons linéaires, qui représentent

1. le mouvement global des deux points matériels, c'est à dire le mouvement de leur centre de masse,
2. leur mouvement l'un par rapport à l'autre ou ce qui est strictement équivalent, le mouvement de chacune vis-à-vis du centre de masse.

La bonne surprise, c'est que le mouvement *a priori* complexe de deux particules se ramène parfois au problème déjà vu d'une seule particule dans un champ de force fixe.

L'étude des désintégrations et des collisions, outre son intérêt intrinsèque, permet de mieux se familiariser avec cette séparation d'un mouvement d'une particule appartenant à un groupe entre

- i)* la mouvement global du groupe,

¹Jules Romains, *Knock*

ii) le mouvement par rapport au groupe.

Le fameux problème de Kepler sera abordé en détail, avec d'abord des révisions sur les forces centrales et sur le mouvement d'une masse dans le champ fixe du Soleil ou d'une autre étoile.

Suivra le problème des étoiles doubles et de la diffusion de corps de masses comparables. Enfin, le problème à trois corps sera décrit, avec quelques solutions fameuses, comme celles de Lagrange.

Si le temps le permet, on terminera par la mécanique des particules rapides : la mécanique classique est modifiée en mécanique relativiste. Nous ne traiterons pas les changements de référentiel et les paradoxes d'espace-temps, mais la dynamique avec des nouvelles relations fonctionnelles entre vitesse, quantité de mouvement et énergie cinétique.

1.3 Révisions et notions nouvelles

La difficulté de ce genre de cours à ce stade des études, c'est que les étudiants ont déjà vu certaines notions, en gardent un souvenir confus, et n'arrivent pas à corriger leurs mauvaises habitudes, comme celle de ne pas assez utiliser la conservation de l'énergie². Un proverbe dit que «Dix mille anglais se noient chaque année dans la tamise pour n'avoir joué atout suffisamment tôt au bridge». Combien d'étudiants se jeteront-ils dans l'Isère pour avoir oublié de faire un bilan d'énergie ?

Le paradoxe, c'est que les notions nouvelles, par exemple sur la Relativité, risquent de mieux passer, alors qu'elles sont intrinsèquement plus difficiles.

Profitez-donc des premiers TD pour redresser la barre sur la mécanique du point élémentaire.

1.4 Révisions de mécanique du point

Le mouvement d'un point matériel dans un référentiel est caractérisé par l'évolution en temps de la position, soit si O est une origine, par la connaissance de la fonction

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OM}(t), \quad (1.1)$$

dont les dérivées sont *la vitesse* et *l'accélération*. À ces attributs géométriques et cinématiques, s'ajoute une caractéristique physique du point matériel, sa *masse*, à partir de laquelle on peut construire les grandeurs dynamiques que sont la *quantité de mouvement* et *l'énergie cinétique*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.2)$$

Dans un référentiel Galiléen, une particule isolée voit sa quantité de mouvement et son énergie cinétique inchangées : on a un mouvement rectiligne uniforme. Si la particule est soumise

²Un exemple, quelle est la vitesse acquise dans le vide après 10 m de chute, si $g = 10 \text{ m/s}^2$. Combien écriront $v = gt$ suivi de $x = gt^2/2$ et élimineront laborieusement le temps pour trouver la relation entre v et x , alors qu'on peut écrire directement que $mv^2/2 = mgh$.

à des forces de résultante \mathbf{f} , alors les grandeurs dynamiques évoluent selon la loi de Newton et le théorème de l'énergie cinétique

$$d\mathbf{p} = \mathbf{f} dt, \quad dK = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.3)$$

La première loi se traduit par le très utile, mais parfois trop utilisé $m\ddot{x} = f_x$, etc. La deuxième par le bilan d'énergie

$$K(A) - K(B) = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.4)$$

et dans le cas particulier où la force dérive d'une énergie potentielle E_P ³, par la conservation de l'énergie mécanique totale définie comme

$$E_M = K + E_P. \quad (1.5)$$

Le lien entre force et énergie potentielle est

$$f_x = -\frac{\partial E_P(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_P(x, y, z) = E_P(x_0, y_0, z_0) - \int_{M_0}^M \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Un autre résultat important est le théorème du moment cinétique, dont il existe plusieurs variantes, le plus simple étant :

La dérivée du moment cinétique par rapport à un point fixe O est le moment des forces par rapport à ce point.

Soit $d\mathcal{L}_O/dt = \mathcal{M}_O$, avec $\mathcal{L}_O = \mathbf{OM} \times \mathbf{p}$ et $\mathcal{M}_O = \mathbf{OM} \times \mathbf{f}$.

Parmi les mouvements remarquables, on peut signaler :

- le mouvement uniformément accéléré : la force \mathbf{f} est constante. La vitesse le long de \mathbf{f} évolue linéairement, la trajectoire est une parabole,
- le mouvement harmonique avec $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$. Le mouvement est sinusoïdal le long de chaque axe, par exemple $x = x_0 \cos(\omega t) + \dot{x}_0/\omega \sin(\omega t)$, avec une pulsation ω telle que $m\omega^2 = k$. Le mouvement est plan, et la trajectoire est une ellipse de centre O , le centre de force.
- le mouvement Keplerien, cas particulier du mouvement à force centrale. La trajectoire est une conique de foyer O , le centre de force, et décrite selon la loi des aires. Les hyperboles correspondent à une énergie mécanique $E_M = mv^2/r + k/r$ positive (c'est toujours le cas pour une force $\mathbf{f} = k\mathbf{r}/r^3$ répulsive ($k > 0$), les paraboles à $E_M = 0$ et les ellipses à $E_M < 0$.
- le mouvement d'une particule de charge q sous l'influence d'un champ magnétostatique \mathbf{B} où elle subit la force $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Les théorèmes fondamentaux de la mécanique du point, loi de Newton, théorème de l'énergie cinétique, théorème du moment cinétique, sont valables dans leur forme ci-dessus à condition que l'on opère dans un référentiel « galiléen ». Un autre référentiel déduit par

³ce n'est pas toujours le cas

translation uniforme, est également galiléen, et tous les référentiels galiléens sont équivalents, aucun d'eux n'est privilégié. Par contre, les lois de la dynamique ne sont plus valables sous la même forme dans un référentiel non galiléen, qui est en accélération par rapport à un référentiel galiléen, que cette accélération soit de type translation accélérée, ou rotation, ou les deux en même temps. Avec les notations habituelles (voir cours de première année), il faut ajouter aux forces physiques des forces dites d'inertie, dont l'expression est

$$\mathbf{f}_{ie} = -m\mathbf{a}_e, \quad \mathbf{f}_{ic} = -2m\boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{v}_r. \quad (1.7)$$

1.5 Ce qu'il faudra retenir

Si on devait retenir qu'une chose du programme de cette année, je choisirais le théorème de König sur l'énergie. Nous le reverrons en son temps. Le voici en primeur. Pour un système de deux particules, de masses m_i , et de vitesses \mathbf{v}_i , l'énergie cinétique s'écrit

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2. \quad (1.8)$$

Ce théorème exprime que l'énergie contient un premier terme – en général inaliénable – qui correspond à l'énergie de translation globale, c'est-à-dire l'énergie cinétique du centre de masse, et un deuxième terme qui traduit l'énergie cinétique du mouvement relatif, et qui peut diminuer ou augmenter, se transformant par exemple en énergie potentielle, sous l'influence de la force qui agit entre les deux particules.

Par exemple, si on connaît la vitesse et la position initiales d'un astéroïde sous l'influence d'une étoile fixe de masse M , on sait qu'il restera en orbite finie (elliptique) si $mv_0^2/2 - GMm/r_0 < 0$. Supposons que l'on connaisse les masses ainsi que les positions et vitesses initiales de deux astres proches l'un de l'autre et relativement éloignés des autres étoiles. À quelle condition resteront-ils à distance finie l'un de l'autre ? (En fait ils décriront chacun une ellipse dans le référentiel du centre de masse.) La réponse est simplement que la somme de l'énergie potentielle $-Gm_1m_2/r_{12}$ et de l'énergie cinétique relative (le deuxième terme de la décomposition de König) doit être négative. On voit sur cet exemple la puissance de ce théorème.

Chapitre 2

Systemes de deux ou plusieurs particules

2.1 Introduction

Si on considère la Terre et le Soleil ou bien l'atome d'hydrogène formé d'un proton et d'un électron, on a, à une assez bonne approximation, la situation d'une particule dans le champ de force statique d'une source fixe, le Soleil dans un cas, le proton dans l'autre. Il est cependant des situations où les deux partenaires ont des masses comparables, et aucun de reste fixe sous l'influence de l'autre. Le problème est *a priori* beaucoup plus compliqué que celui d'une particule dans un champ de force fixe.

Il y a cependant une simplification, qu'il faut essayer d'exploiter, c'est que les forces sont internes, l'attraction gravitationnelle ou électrique d'un corps sur l'autre, alors que globalement, le système est isolé. Il y a donc intérêt à exprimer les équations du mouvement non pas en fonction des coordonnées individuelles r_i et de leurs dérivées, mais en fonction de la position (vectorielle) du centre de masse et de la séparation (vectorielle) du centre de masse. Ce sera l'essentiel de ce chapitre.

Notons que la décomposition entre variables du centre de masse et variables vis-à-vis du centre de masse peut servir également dans le cas où le système n'est pas isolé. On le verra dans l'exemple de deux charges électriques dans un champ fixe.

2.2 Centre de masse

2.2.1 Définition

C'est le cas particulier de la notion de barycentre en mathématiques, défini comme

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum_i \alpha_i \mathbf{OM}_i}{\sum_i \alpha_i}, \quad (2.1)$$

avec la condition que $\sum_i \alpha_i \neq 0$, qui définit un point G indépendant de l'origine O choisie (le démontrer à titre d'exercice). Dans le cas où chaque α_i est la masse m_i , le barycentre est appelé *centre de masse*. Comme chaque $m_i > 0$, on a bien $\sum_i m_i \neq 0$; de plus, le centre de

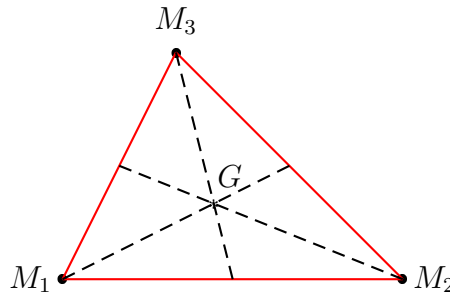
masse est à l'intérieur du domaine convexe défini par les points, intérieur du segment M_1M_2 , intérieur du triangle $M_1M_2M_3$, intérieur du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$.

2.2.2 Exemples

1) $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$ (en unités arbitraires). G est au tiers de M_1M_2 , plus près de la masse lourde en M_2



2) $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. G est le «centre de gravité du triangle», l'intersection des médianes. Noter qu'il s'agit de trois points. Le résultat ne subsiste pas forcément pour les autres triangles, le système de trois barres (comme l'instrument de musique) ou la plaque triangulaire.



2.2.3 Propriétés du centre de masse

- Convexité. Voir ci-dessus. Conséquence de $m_i > 0$
- Additivité. Si G_1 est le centre de masse de M_1, M_2, \dots, M_N , et G_2 celui de $M_{N+1}, M_{N+2}, \dots, M_F$, alors le centre de masse de l'ensemble des points est le centre de masse de G_1 , affecté de la masse $m_1 + m_2 + \dots + m_N$ et de G_2 , affecté de la masse $m_{N+1} + \dots + m_F$.
- Équilibre

$$\sum_i m_i \mathbf{GM}_i = 0, \quad (2.2)$$

– En particulier, pour deux points, nous utiliserons fréquemment

$$\begin{aligned}
 m_1 \mathbf{GM}_1 + m_2 \mathbf{GM}_2 &= 0, \\
 \mathbf{GM}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2, \\
 \mathbf{GM}_2 &= +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.4 Référentiel du centre de masse

C'est un référentiel lié à G , en translation par rapport au référentiel où le problème est posé, c'est-à-dire, avec des axes parallèles.

Si on part d'un référentiel galiléen, et si le système est isolé, alors G a un mouvement rectiligne uniforme, et le référentiel du centre de masses est également galiléen.

Si la résultante des forces extérieures est non nulle, G est accéléré, et le référentiel du centre de masse n'est plus galiléen. Mais il n'est pas en rotation, ce qui élimine les forces de Coriolis.

2.3 Décomposition des vitesses et accélérations

Si on veut comprendre le mouvement de deux patineurs qui évoluent d'un bout à l'autre d'une patinoire en tournant l'un autour de l'autre, on a sans doute intérêt à décomposer le mouvement complexe (une sorte de spirale, plus précisément une courbe de type cycloïdale pour chacun) en deux composantes : un mouvement d'ensemble, en première approximation une translation du centre de masse, et un mouvement relatif au centre de masse, en première approximation une rotation de chacun autour du centre de masse. On évalue ainsi l'effort fourni : une force constante, qui s'opposant à la faible résistance de la glace, maintiendra une translation uniforme ; une force centripète (chaque danseur tire sur les bras de son partenaire) pour induire une rotation, de même que le lanceur, avant le jet, tire sur la chaîne pour faire tourner le marteau. On écrit donc $\mathbf{OM}_i = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}_i$ et donc

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i^*, \quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_i^*, \tag{2.4}$$

en dérivant les termes, ce qui définit les notations.

Pour l'instant, c'est assez simple. Il y aura malheureusement des complications plus loin.

2.4 Décomposition de König de l'énergie cinétique

Pour un système de masses ponctuelles, l'énergie cinétique est simplement

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{2.5}$$

Cette énergie dépend évidemment du référentiel où elle est calculée. Il est intéressant de séparer la partie due au mouvement d'ensemble du centre de masse et la partie due au mouvement relatif des particules.

Si on reporte dans (2.5) la décomposition (2.4) de la vitesse, on constate que la somme des termes croisés fait apparaître $\sum m_i \mathbf{v}_i^*$ qui s'annule, car c'est la dérivée de $\sum m_i \mathbf{G} \mathbf{M}_i$. Donc

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \cdots + \frac{1}{2} m_N v_N^{*2} \right], \quad (2.6)$$

autrement dit, *l'énergie cinétique est somme de l'énergie du centre de masse affecté de la masse totale, et de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse. C'est le théorème de König.*

Pour deux particules, on peut réécrire ce théorème de manière un peu différente.

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2, \quad (2.7)$$

où l'on fait apparaître la masse réduite

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{ou} \quad \mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}, \quad (2.8)$$

et la vitesse relative (la différence de deux vitesses est indépendante du référentiel)

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2^* - \mathbf{v}_1^*. \quad (2.9)$$

Application : comparaison des collisionneurs symétriques et des accélérateurs conventionnels.

Considérons un dispositif classique de physique nucléaire, où un proton de masse m , animé d'une vitesse v grâce à un accélérateur, vient heurter un proton immobile appartenant à une cible. Les deux termes de la décomposition de König sont égaux de valeur $mv^2/4$. Autrement dit, la moitié seulement de l'énergie du proton du faisceau est réellement utilisée dans la collision.

Par contre, si on fait se rencontrer de plein fouet deux protons animés l'un de vitesse v' , l'autre de la vitesse opposée $-v'$, la totalité de l'énergie cinétique est disponible. Avec $v' = v/2$, on obtient la même énergie de collision que dans le cas de la collision sur cible fixe.

De la même façon, une voiture roulant à 100 km/h et heurtant de face une voiture identique immobile (freins serrés) lui fera autant de dégâts que lors du choc frontal de ces deux voitures roulant chacune à 50 km/h. Si la voiture percutée a les freins serrés, la vitesse de 100 km/h est la vitesse dans le centre de masse. Toute l'énergie est dépensée en déformation.

2.5 Équation de Newton pour deux particules en interaction

Si deux particules subissent des forces dans un référentiel galiléen, elles évoluent selon la loi de Newton

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{f}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_2. \quad (2.10)$$

Si les particules sont indépendantes, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r}_1)$, de même pour l'autre, et chaque particule évolue sans se soucier de l'autre.

Dans le cas le plus général, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, les degrés de liberté sont couplés, et la complexité des équations à résoudre augmente énormément.

Cependant, on peut réécrire les équations (2.10) sous la forme

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= \frac{\mathbf{f}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{f}_1}{m_1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

et souvent des implications apparaissent. Un cas fréquent est celui de particules qui ne font qu'interagir l'une avec l'autre, avec une force qui ne dépend que de leur séparation $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ et qui satisfait au principe de l'action et de la réaction, soit

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{f}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

Alors (2.11) devient

$$\ddot{\mathbf{r}}_G = 0, \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

La première équation traduit que pour ce système isolé, le centre de masse a un mouvement rectiligne et uniforme. La deuxième équation traduit l'évolution dans le temps du vecteur *séparation* \mathbf{r} . Elle est formellement identique à celle d'une particule de *position* \mathbf{r} et subissant un champ de force statique $\mathbf{f}(\mathbf{r})$. Les équations du mouvement sont découplées.

Remarques :

1. On précise bien « la force satisfait au principe de l'action et de la réaction ». C'est le cas pour les forces gravitationnelles ou électrostatiques. Il faut se méfier des forces magnétiques.
2. On parle parfois d'une particule « fictive », de masse μ telle que $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-2}$, de position M telle que $\mathbf{OM} = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, et subissant la force \mathbf{f} .
3. La réécriture en mouvement relatif et mouvement du centre de masse peut s'avérer utile même si le système n'est pas isolé. Considérons deux particules chargées identiques subissant un champ électrique \mathbf{E} uniforme et leur répulsion électrostatique (on néglige les effets magnétiques). Le mouvement du centre de masse et l'évolution de la séparation se découpent. Le premier est un mouvement parabolique à accélération constante. Le second est une répulsion coulombienne, avec lois de Képler et trajectoire hyperbolique pour l'extrémité du vecteur \mathbf{r} . On a une combinaison de deux mouvements classiques que l'on sait résoudre. Le problème est donc en principe résolu.

2.6 Théorème du centre de masse

Supposons qu'un ensemble de points matériels $\{m_i\}$ soit soumis d'un part à des forces extérieures \mathbf{f}_i et d'autre part à des forces intérieures $\mathbf{F}_{i \leftarrow j}$ obéissant au principe de l'action et de la réaction $\mathbf{F}_{i \leftarrow j} + \mathbf{F}_{j \leftarrow i} = 0$. On se méfiera donc des forces magnétiques. Alors, chaque masse est soumise à une loi de Newton

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i \leftarrow j}. \quad (2.14)$$

Quand on ajoute ces équations, les forces intérieures disparaissent, et on trouve que le centre de masse évolue selon

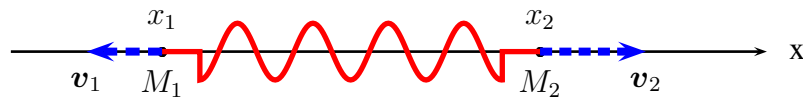
$$(m_1 + \dots + m_N) \ddot{\mathbf{x}}_G = \sum_i \mathbf{f}_i. \quad (2.15)$$

Autrement dit, le centre de masse évolue comme un point matériel de masse $M = m_1 + \dots + m_N$ auquel serait appliqué la totalité des forces extérieures.

2.7 Premières applications

2.7.1 Ressort à deux masses, mouvement rectiligne horizontal

Deux masses sont guidées sans frottement dans une glissière horizontale. Elles sont séparées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ . Sur un axe Ox , on supposera $x_1 < x_2$ pour les abscisses. On note les masses m_1 et m_2 , les conditions initiales $x_{1,0}, \dots, v_{2,0}$.



Les équations de Newton sont

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell), \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell). \quad (2.16)$$

dont on tire

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1 - \ell)[m_1^{-1} + m_2^{-1}]. \quad (2.17)$$

Le centre de masse se déplace uniformément, en gardant sa vitesse initiale

$$v_G = \frac{m_1 v_{1,0} + m_2 v_{2,0}}{m_1 + m_2}, \quad (2.18)$$

tandis que la séparation $x = x_2 - x_1$ obéit à une équation d'oscillation classique (μ est la masse réduite, donc $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$)

$$\mu \ddot{x} = -k(x - \ell) . \quad (2.19)$$

On a des oscillations autour de la position d'équilibre $x = \ell$ et la loi horaire est

$$x = \ell + (x_0 - \ell) \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t) , \quad (2.20)$$

avec $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, $x_0 = x_{2,0} - x_{1,0}$ et $v_0 = v_{2,0} - v_{1,0}$. On peut, bien-sûr réécrire la solution en faisant apparaître amplitude et phase

$$x = \ell + A \cos(\omega t + \varphi) , \quad (2.21)$$

avec $A = \sqrt{(x_0 - \ell)^2 + v_0^2/\omega^2}$, $\sin \varphi = v_0/(\omega A)$, $\cos \varphi = (x_0 - \ell)/A$. Il resterait à prendre quelques précautions pour que $x(t) > 0$, c'est-à-dire que les masses ne se «croisent» pas.

Connaissant l'évolution dans le temps de $(m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$ et de $x_2 - x_1$, on peut facilement calculer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

2.7.2 Ressort à deux masses, mouvement vertical sous l'influence de la pesanteur

On peut garder les mêmes notations, en supposant que Ox est un axe vertical dirigé vers le bas (pour ne pas introduire trop de signes moins). Les équations de départ sont modifiées en

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + k(x_2 - x_1 - \ell) , \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - k(x_2 - x_1 - \ell) . \quad (2.22)$$

L'équation du mouvement relatif ne change pas, on a la même oscillation que précédemment. Mais le centre de masse tombe avec une accélération g , ce qui lui donnera une loi horaire

$$x_G(t) = \frac{gt^2}{2} + v_G(0)t + x_G(0) , \quad (2.23)$$

où l'on calcule facilement $x_G(0)$ et $v_G(0)$ à partir des conditions initiales.

2.7.3 Ressort à deux masses en mouvement rectiligne, forces extérieures constantes

Supposons maintenant que les forces extérieures $m_i g$ ne soient plus d'origine gravitationnelle, tout en restant constantes, pour simplifier. On a donc des équations de mouvement

$$m_1 \ddot{x}_1 = f_1 + k(x_2 - x_1 - \ell) , \quad m_2 \ddot{x}_2 = f_2 - k(x_2 - x_1 - \ell) . \quad (2.24)$$

Si $f_2/m_2 > f_1/m_1$, la force extérieure, à elle seule, tend à donner à l'extrémité M_2 une accélération (algébriquement) plus grande : le ressort doit se dilater. Si $f_2/m_2 < f_1/m_1$, on a plutôt une compression. Les équations du mouvement, tout en restant solubles, sont un

peu plus compliquées. Les forces extérieures seules (c'est le théorème du centre de masse) gouvernent le mouvement du centre de masse. Les autres disparaissent, car elles satisfont au principe de l'action et de la réaction. Mais il reste un résidu des forces extérieures dans l'équation régissant l'évolution de la séparation.

On obtient

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}_G &= f_1 + f_2, \\ \mu\ddot{x} &= \left(\frac{f_2}{m_2} - \frac{f_1}{m_1}\right) - k(x - \ell). \end{aligned} \quad (2.25)$$

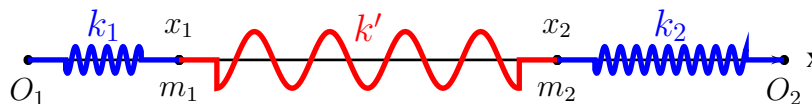
Le terme supplémentaire a pour effet de déplacer le point d'équilibre du ressort, qui est le point médian des oscillations.

2.7.4 Oscillations couplées

Voir le cours «Ondes et vibrations» au deuxième semestre. On suppose que les masses m_1 et m_2 sont guidées sans frottement sur une glissière horizontale. Les abscisses x_1 et x_2 sont comptées à partir de la position d'équilibre. La première masse est retenue à gauche par un ressort de raideur k_1 . La deuxième, à droite, avec une raideur k_2 . Entre les deux, un ressort de raideur k' . La première force est $-k_1(x_1 + \ell_1 - \ell_{1,0})$, où ℓ_1 est la longueur à l'équilibre, $\ell_{1,0}$ la longueur au repos. Tous les termes constants comme $-k_1(\ell_1 - \ell_{1,0})$ se neutralisent à l'équilibre et disparaissent des équations. On ne retiendra que les termes supplémentaires comme $-k_1x_1$. On obtient les équations

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k'(x_1 - x_2), \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k'(x_2 - x_1) - k_2x_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

À propos des signes. Si x_2 était maintenu fixe, les deux raideurs s'ajoutent. Ceux qui font des extenseurs dans les salles de sport le savent bien : pour déplacer m_1 à droite, par exemple, il faut étirer le ressort k_1 et comprimer le ressort k' , et les deux efforts s'ajoutent. On peut donc détecter une erreur de signe éventuelle sur le terme en k' .



On présente souvent ce problème dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. Alors, on obtient des équations découplées en ajoutant et en retranchant les équations, soit

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2), \quad m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(k + k')(x_2 - x_1). \quad (2.27)$$

On peut intégrer chacune de ces équations si on connaît les conditions initiales.

Dans le cas général, le théorème du centre de masse reste valable. En ajoutant les équations, on voit bien que

$$M\ddot{x}_G = -k_1x_1 - k_2x_2, \quad (2.28)$$

c'est-à-dire que l'accélération du centre de masse est gouvernée par les forces extérieures. La difficulté, c'est que cette résultante ne s'exprime pas au moyen de x_G seul, autrement dit que l'équation (2.28) n'est pas découplée.

La méthode de résolution (après avoir divisé la i^e équation par m_i) revient à diagonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} (k_1 + k')/m_1 & -k'/m_1 \\ -k'/m_2 & (k_2 + k')/m_2 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

On cherche toujours des combinaisons linéaires de x_1 et x_2 qui simplifient le problème, mais ces combinaisons ne sont plus le centre de masse x_G et la distance $x = x_2 - x_1$.

Chapitre 3

Desintégrations et chocs

3.1 Introduction

Il y a un intérêt intrinsèque à étudier les désintégrations et chocs : comprendre les phénomènes radioactifs à l'échelle microscopique, les réactions nucléaires dans les accélérateurs, l'évolution des fragments lors de l'éclatement d'une météorite, etc.

C'est aussi un champ idéal pour bien comprendre la séparation entre mouvement d'ensemble et mouvement relatif pour une particule au sein d'un groupe de particules.

Conceptuellement, une désintégration semble plus simple, car l'état initial est figé. Mais il n'y a pas vraiment de différence entre désintégration et collision. Dans le second cas, l'état initial qui se désintègre est fait de l'énergie et de la quantité de mouvement apportées par les particules incidentes. La collision élastique est la plus simple, car on connaît déjà une solution aux équations de conservation, c'est le cas où le projectile manque la cible.

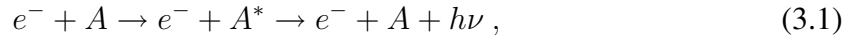
On se limite ici aux contraintes apportées par la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, ce qui ne permet pas, en général, de prédire exactement l'état final. Les lois de conservation permettent de délimiter un ensemble possible d'énergies et de quantités de mouvement. Pour vraiment prédire l'état final, il faut des renseignements supplémentaires, comme le paramètre d'impact. Au billard, par exemple, on obtient un résultat très différent selon que l'on heurte la boule blanche de plein fouet ou de façon rasante.

3.2 Choc élastique, choc inélastique

Prenons l'exemple du choc de deux boules de pétanque. Une partie de l'énergie cinétique de translation initiale est transformée en autres formes d'énergie : énergie de rotation, qui reste de nature cinétique ; énergie thermique ; énergie lumineuse si le choc, par temps sec, produit une petite étincelle ; etc. À la limite où l'énergie cinétique est conservée, on parle d'un choc *élastique*.

Lors du choc d'objets microscopique, l'énergie cinétique peut également se transformer en d'autres formes d'énergie. Un atome A peut passer à un niveau excité A^* à la suite d'un

choc, puis se désexciter en émettant un quantum de lumière, symboliquement



dans le cas d'un bombardement électronique. On peut imaginer une ionisation, auquel cas une partie de l'énergie cinétique initiale a servi à arracher l'électron de son orbite. Par exemple



3.3 Le choix du référentiel

Selon les cas, et quand on a le choix, selon les goûts, il y a deux attitudes possibles pour faire le bilan cinématique d'une désintégration ou d'un choc :

1. Traiter le problème directement dans le référentiel où il est posé.
2. Passer à une autre référentiel où le bilan des lois de conservation est plus facile à mettre en œuvre, puis revenir au référentiel initial.

Nous donnerons des exemples de chaque méthode.

3.4 Désintégration à l'arrêt en deux corps

Considérons la désintégration $A \rightarrow a_1 + a_2$. Soient m_1 et m_2 les masses de a_1 et a_2 , T l'énergie disponible. Les lois de conservation donnent

$$T = T_1 + T_2, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (3.3)$$

Comme $p_i^2 = 2m_i T_i$, on a pour les énergies cinétiques deux équations

$$T = T_1 + T_2, \quad m_1 T_1 = m_2 T_2, \quad (3.4)$$

qui déterminent complètement la part de chaque fragment

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T, \quad T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T. \quad (3.5)$$

Applications.

1) Dans une désintégration α , soit ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X + \alpha$, car le noyau d'Helium, α emporte $A = 4$ nucléons dont $Z = 2$ protons, on a des raies α monoénergétiques, une par état final bien identifié.

2) On voit que la particule légère a tendance à emporter la plus grande part de l'énergie. Dans la désintégration α précédente, si X est un noyau d'Uranium de masse environ 60 fois celle de l'Hélium, le noyau de recul prendra moins de 2% de l'énergie libérée, le reste étant acquis par la particule α . De même, pour un tir au canon, l'obus prend l'essentiel de l'énergie libérée par la combustion de la poudre, car $m_1 \ll m_2$, surtout si l'affût du canon est bien ancré dans le sol.

3.5 Désintégration en deux corps d'une particule en mouvement

On considère de nouveau une désintégration $A \rightarrow a_1 + a_2$, avec des masses m_1 et m_2 , mais on suppose que le système a une quantité de mouvement \mathbf{P} . On appelle toujours T l'énergie cinétique totale, qui comprend l'énergie de translation du centre de masse. Il faut donc que $T > P^2/(2(m_1+m_2))$. La différence $T - P^2/(2(m_1+m_2))$ est l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse, l'énergie vraiment libérée pour séparer les fragments l'un de l'autre.

Il faut résoudre l'ensemble des équations

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2, & \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \\ T_1 &= \frac{p_1^2}{2m_1}, & T_2 &= \frac{p_2^2}{2m_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Une petite remarque d'ordre pratique. Vitesse et quantité de mouvement sont redondantes, il faut éviter de les mélanger au hasard et choisir d'éliminer l'une au profit de l'autre. Il n'y pas de panacée quant au meilleur choix. Si on traite le problème dans un référentiel unique, la quantité de mouvement est souvent plus simple, car elle intervient directement dans un des bilans. Si on change de référentiel, la vitesse est commode pour écrire les transformations de Galilée.

Chaque particule combine une vitesse de centre de masse, $\mathbf{v}_G = \mathbf{P}/M$, où $M = m_1 + m_2$ et une vitesse dans le centre de masse, soit \mathbf{v}_i^* . Selon que ces deux vitesses sont parallèles, ou antiparallèles, ou font un angle, l'énergie est maximale, ou minimale ou entre les deux.

On a vu que l'énergie se sépare en

$$T = \frac{P^2}{2M} + \left[T - \frac{P^2}{2M} \right], \quad (3.7)$$

et que la particule 1 prendra la fraction m_2/M du deuxième terme, ce qui correspond à une vitesse

$$v_1^* = \sqrt{\frac{2m_2}{m_1M} \left[T - \frac{P^2}{2M} \right]}. \quad (3.8)$$

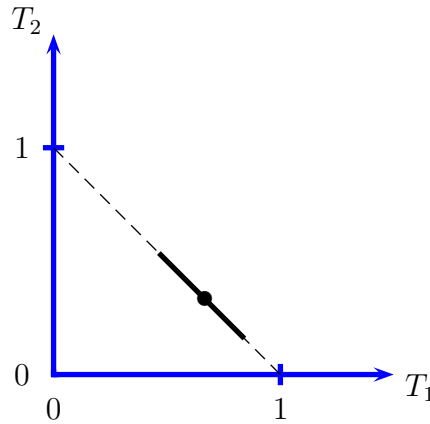
Les maximum et minimum de T_1 sont donc

$$\frac{1}{2}m_1 \left\{ \frac{P}{M} \pm \sqrt{\frac{2m_2}{m_1M} \left[T - \frac{P^2}{2M} \right]} \right\}^2. \quad (3.9)$$

Les extrema de T_2 sont obtenus par $m_1 \leftrightarrow m_2$, et on vérifie que

$$T_2^{\min} = T - T_1^{\max}. \quad (3.10)$$

La plage de variation de T_1 et T_2 est représentée sur la figure,



où l'on a supposé (dans les unités légales) que $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $T = 1$ et $P = 0,5$, la quantité de mouvement totale. On voit que l'espace (en pointillé) suggéré par la conservation et la positivité de l'énergie cinétique est fortement rétréci par la conservation de la quantité de mouvement.

3.6 Désintégration à trois corps

3.6.1 Limites des énergies individuelles

Nous nous restreindrons au cas où la désintégration se produit au repos, si bien que les équations de conservation pour $A \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$ sont

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \quad T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (3.11)$$

Le fait nouveau par rapport à la désintégration en deux corps, c'est que l'énergie d'un fragment, disons T_3 , peut varier entre $T_3 = 0$ et une fraction importante de T .

Historiquement, c'est l'observation que les électrons, dans la désintégration β avaient non pas une énergie toujours identique, mais variant dans une plage d'énergie, qui a amené à postuler l'existence d'un autre protagoniste, invisible à l'époque, le neutrino. Par exemple, avec les notations modernes, la désintégration du neutron s'écrit

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (3.12)$$

Étudions la plage de variation de T_3 , par exemple. La valeur $T_3 = 0$ ne pose pas de difficulté. Les deux autres particules se partagent l'énergie selon les règles vues précédemment, soit

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T, \quad T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T. \quad (3.13)$$

De même, $T_1 = 0$, ou $T_2 = 0$ sont possibles. Pour $T_1 = 0$, on aurait d'après l'équation ci-dessus, $T_3 = T m_2 / (m_2 + m_3)$. Mais il faut noter que ni cette valeur de T_3 ni la valeur $T_3 = T m_1 / (m_1 + m_3)$ que l'on aurait pour $T_2 = 0$ ne donne à T_3 son maximum. On peut trouver mieux, mais disons tout de suite que $T_3 = T$ est impossible, car les particules 1 et 2

seraient toutes les deux immobiles et ne pourraient équilibrer la quantité de mouvement \mathbf{p}_3 . Alors comment rendre T_3 maximal ?

Pour T_3 donné, il y a automatiquement une quantité de mouvement \mathbf{p}_3 associée à la particule 3, de direction arbitraire, mais de module $(2m_3T_3)^{1/2}$ imposé. Le système $\{1, 2\}$ a une quantité de mouvement $-\mathbf{p}_3$. Son énergie ne peut être inférieure à $p_3^2/(2m_1 + 2m_2) = T_3 m_3/(m_1 + m_2)$, premier terme du théorème de König. Mais on peut en rester là si le deuxième terme est nul, c'est-à-dire si les particules 1 et 2 n'ont pas de mouvement relatif, et donc vont à la même vitesse.

En résumé, T_3 et $T_3 m_3/(m_1 + m_2)$ sont les seules formes de l'énergie totale T quand T_1 est maximal, soit

$$T_3^{\min} = 0, \quad T_3^{\max} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T. \quad (3.14)$$

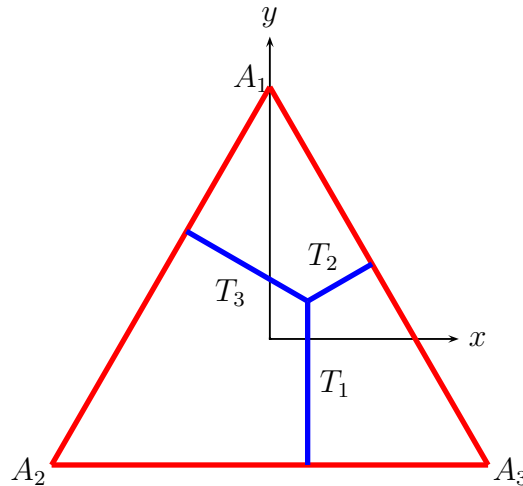
3.6.2 Diagramme de Dalitz

On pourra sauter cette sous-section en première lecture.

Le physicien nucléaire Dalitz a proposé une représentation commode de la plage de valeurs des énergies individuelles T_i , soumises à la condition

$$T_1 + T_2 + T_3 = T. \quad (3.15)$$

Cette équation évoque un résultat de géométrie élémentaire : la somme des distances d'un point aux sommets d'un triangle équilatéral est une constante, égale à la hauteur du triangle. Voir la figure.



Les sommets A_i sont à une distance $2T/3$ du centre du triangle. Les cotés sont à une distance $T/3$. On peut introduire les vecteurs unitaires u_i de OA_i , soit

$$u_1 = (0, 1), \quad u_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2), \quad u_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2), \quad (3.16)$$

qui sont à 120° l'un de l'autre. On voit que $T_1 = T/3 + y$, et plus généralement, $T_i = T/3 + \mathbf{OM} \cdot u_i$, soit, pour M de coordonnées (x, y) ,

$$T_1 = T/3 + y, \quad T_2 = T/3 - x\sqrt{3}/2 - y/2, \quad T_3 = T/3 + x\sqrt{3}/2 - y/2. \quad (3.17)$$

Pour T_1 donné, par exemple, les particules 2 et 3 ont d'abord un mouvement de recul global, avec une quantité de mouvement globale $-\mathbf{p}_1$. S'y ajoute, si T_1 n'a pas sa valeur maximale, un mouvement relatif entre les particules 2 et 3. Pour chacune des particules 2 et 3, ces deux mouvements se combinent de façon maximale si les vitesses sont parallèles et de même sens, de façon minimale si les vitesses sont parallèles et de sens contraire. Les extrêmes sont donc obtenus quand les \mathbf{p}_i sont parallèles.

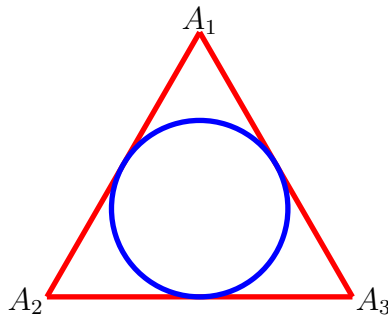
On démontre (et on vérifie facilement le théorème, au moins dans un sens), qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient parallèles est que leur déterminant de Gram, d'élément générique $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$, s'annule. Compte tenu de la loi de conservation $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, qui implique que $2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_3^2 - p_1^2 - p_2^2$, cela s'écrit

$$\begin{vmatrix} 2p_1^2 & p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 \\ p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 & 2p_2^2 \end{vmatrix} = (2m)^2 \begin{vmatrix} 2T_1 & T_3 - T_1 - T_2 \\ T_3 - T_1 - T_2 & 2T_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.18)$$

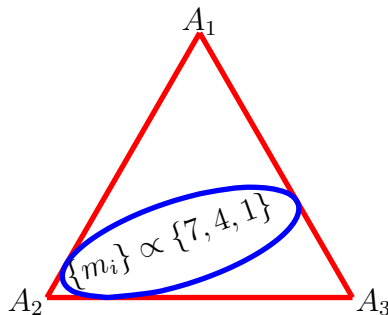
soit en reportant l'expression (3.17) des énergies cinétiques T_i en fonction des coordonnées, et après un petit calcul,

$$x^2 + y^2 = T^2/9, \quad (3.19)$$

qui est le cercle inscrit dans le triangle. Voir figure. En résumé, la conservation et la positivité de l'énergie cinétique permet *a priori* tout point intérieur au triangle équilatéral, et la conservation de la quantité de mouvement restreint à l'intérieur du cercle inscrit.



On peut recommencer le calcul avec des masses inégales. Le domaine des énergies autorisées est limité à une ellipse tangente à chacun des cotés du triangle. Le calcul est un peu fastidieux. Les points extrêmes de cette ellipse sont cependant ceux que nous avons évalué plus haut : répartition de T en T_1 et T_2 quand $T_3 = 0$, etc.



Dans cet exemple, où $m_1 = 7m_3$ est plus grand que $m_2 = 4m_3$ et que m_3 , on voit que T_1 est limité près du coté inférieur où $T_1 = 0$. On retrouve la propriété que les particules légères emportent la plus grande part de l'énergie disponible.

3.7 Collision élastique symétrique

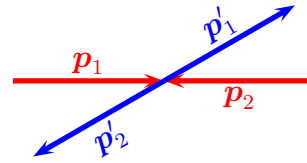
En physique microscopique, dans une collision élastique, on retrouve les mêmes particules dans l'état final que dans l'état initial, soit $a + b \rightarrow a + b$.

En physique macroscopique, le sens est un peu différent. On dit qu'une collision est élastique si aucune forme d'énergie autre que cinétique n'entre en jeu : pas d'énergie thermique, ou de déformation, etc.

Supposons que l'on examine $a + b \rightarrow a + b$. Les impulsions initiales sont \mathbf{p}_1 et $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$. Les énergies cinétiques sont T_1 et T_2 , avec $2m_1T_1 = 2m_2T_2$ et donc si T est l'énergie totale, la partition déjà vue

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T, \quad T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T. \quad (3.20)$$

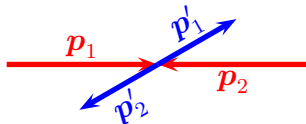
Dans l'état final, les quantités de mouvement sont encore opposées, avec $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$. Leur direction commune est arbitraire, mais leur module est forcément le même que dans l'état initial, sinon l'énergie totale serait modifiée.



Autrement dit, dans le référentiel du centre de masse, lors d'un choc élastique, les quantités de mouvement ne font que tourner. Il en est de même des vitesses dans ce repère, et donc de leur différence. D'où ce résultat : *Dans une collision élastique, la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ tourne en gardant son module.*

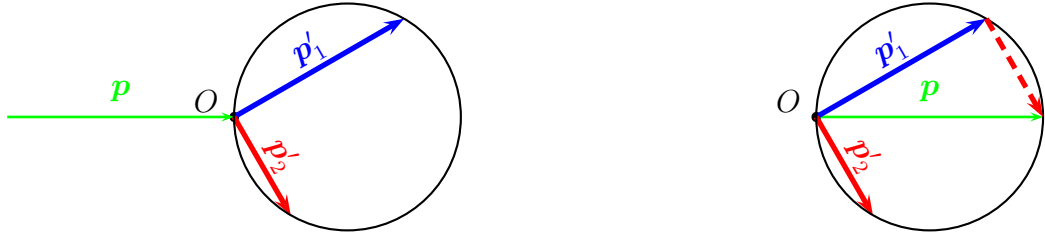
3.8 Collision inélastique symétrique

Nous supposons toujours que la collision est décrite dans le référentiel barycentrique, avec \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 opposés. Mais si une partie de l'énergie incidente est perdue, sans perte de quantité de mouvement, par dissipation de chaleur par exemple, les quantités de mouvement finales, toujours opposées, seront de module plus petit.



3.9 Collision élastique projectile sur cible, masses égales

Le schéma et les notations sont décrits sur la figure.



Les lois de conservation

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \quad p_1^2 + p_2^2 = p^2, \quad (3.21)$$

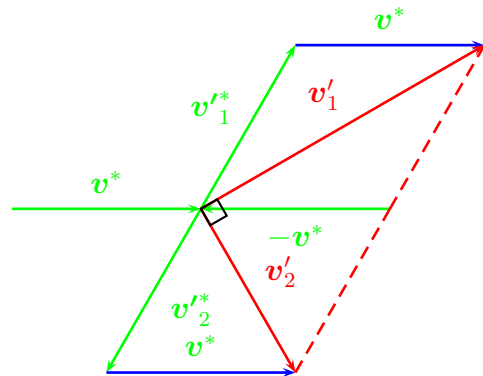
impliquent que $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$, ce qui signifie que les particules partent à angle droit, avec les cas particuliers $p_2 = 0$ (tir raté) et $p_1 = 0$ (carreau).

On vérifie facilement que si $p_1^2 + p_2^2 < p^2$, en cas de perte d'énergie en chaleur lors du choc, les particules partent en faisant angle aigu.

Par un petit raisonnement géométrique, on voit que l'extrémité du vecteur \mathbf{p}_1 décrit la surface d'une sphère. Il en est de même de \mathbf{p}_2 .

À titre d'exercice, on peut retrouver ce résultat par le biais du référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel, les particules arrivent face à face avec des vitesses $\mathbf{v}^* = \mathbf{p}/(2m)$ et $-\mathbf{v}^*$, et elles repartent avec des vitesses de même module, opposées l'une à l'autre, de même module que \mathbf{v}^* . Pour repasser au référentiel initial, on ajoute à toutes les vitesses la vitesse d'entraînement, qui est la vitesse du centre de masse, \mathbf{v}^* .

Les vitesses dans le référentiel de la cible sont construites avec des losanges (cette simplification est à l'égalité des masses), et les angles sont divisés par deux : l'angle de \mathbf{v}'_1 est la moitié de celui de \mathbf{v}^* , de même pour la deuxième particule, et l'angle entre les deux vitesses passe de 180° à 90° .



3.10 Collision élastique projectile sur cible, masses quelconques

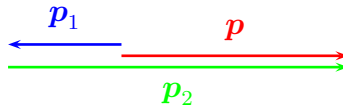
3.10.1 Condition de rebond

Dans le cas de masses égales, on a le phénomène remarquable du carreau : la particule incidente s'arrête et communique toute sa quantité de mouvement et toute son énergie à la cible.

C'est impossible si le projectile possède une masse m_1 différent de la masse m_2 de la cible. Si la particule 2 acquiert la quantité de mouvement de 1, elle y associe une énergie cinétique différente.

L'expérience et l'intuition nous montre que m_1 ne peut repartir en arrière que si $m_1 < m_2$: un cochonnet rebondit sur une boule, et pas l'inverse !

Imaginons en effet le bilan suivant des quantités de mouvement



Si p_1 part en arrière, p_2 est en avant avec un module plus grand que celui de p . Si on avait $m_2 < m_1$, l'énergie $p_2^2/(2m_2)$ serait, à elle seule plus grande que l'énergie initiale $p/(2m_1)$, ce qui est absurde.

3.10.2 Discussion générale

On pourra sauter cette sous-section en première lecture.

Considérons maintenant le cas du choc d'une particule a sur une cible b initialement immobile. Le module des quantités de mouvement va dépendre de l'angle de diffusion de la particule a , soit ϑ .

Si $\vartheta = 0$, le tir est raté, la particule a garde son énergie, et b reste immobile. Si $\theta \neq 0$, a perd de l'énergie, et b est mis en mouvement.

À titre d'exercice, on pourra traiter ce problème en passant par le référentiel du centre de masse, en exploitant les résultats précédents. On peut aussi faire le bilan directement dans le référentiel où se déroule le choc.

On peut écrire les bilans dynamiques

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1, \quad T'_2 = T_1 - T'_1, \quad (3.22)$$

et éliminer tout ce qui concerne le recul de la cible, en injectant ces relations dans la relation caractéristique de la particule b , soit $p'^2_2 = 2m_2T'_2$. On obtient

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = \frac{m_2}{m_1}(\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'_1{}^2), \quad (3.23)$$

qu'on peut réarranger en

$$(m_1 + m_2)\mathbf{p}'_1{}^2 - 2m_1\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}_1 + (m_1 - m_2)\mathbf{p}_1^2 = 0, \quad (3.24)$$

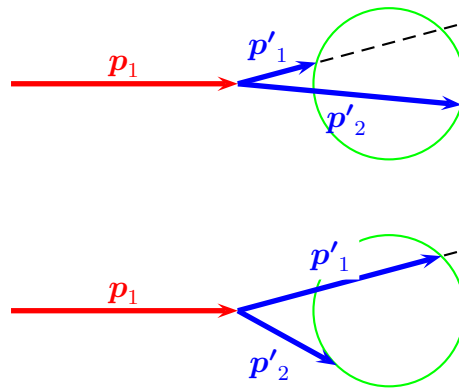
ou encore

$$\left(\mathbf{p}'_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_1\right)^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{p}_1\right)^2, \quad (3.25)$$

où l'on reconnaît l'équation d'une sphère centrée en $m_1\mathbf{p}_1/(m_1+m_2)$ et de rayon $m_2p_1/(m_1+m_2)$.

Si $m_1 > m_2$, la particule a va en avant. Si $m_1 < m_2$, elle peut dans certains cas repartir en arrière. Si $m_1 = m_2$, elle peut exceptionnellement s'arrêter, alors que la cible part en avant.

La figure correspond au cas où $m_1 = 2m_2$. On voit que pour une direction donnée de la particule diffusée, ici $\vartheta = \pi/12$, il y a deux solutions possibles pour le partage d'énergie et de quantité de mouvement.



On retrouve des résultats assez intuitifs. À la pétanque, une boule heurtant le cochonnet ne repart pas en arrière. Le cochonnet peut rebondir sur la boule. Un «carreau» requiert des boules de même masse.

Une vérification de (3.25), c'est que le point à l'avant ($\vartheta = 0$) correspond à $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1$, c'est-à-dire le tire raté, où rien n'est modifié.

3.11 Collision inélastique

Si la collision de deux corps macroscopiques se fait avec déperdition d'énergie, certains résultats ci-dessus sont modifiés.

Dans le cas de la collision symétrique (dans le centre de masse), les masses a et b repartent toujours dos à dos, avec des quantités de mouvement opposées, mais dont le module est inférieur à la valeur initiale. Voir ci-dessus, Section 3.8.

Dans le cas de la collision sur cible fixe, la sphère, lieu des extrémités possibles du vecteur \mathbf{p}'_1 a toujours le même centre, dont l'emplacement est dicté par la conservation de la quantité de mouvement, mais le rayon est diminué de par la perte d'énergie.

À la limite d'un choc complètement mou, le rayon du cercle s'annule : les masses a et b repartent collées ensemble.

3.12 Exemple de choc inélastique

On considère une balle de tennis tombant sur le sol d'une hauteur h . Si on néglige la résistance de l'air, elle arrive avec une vitesse v telle que $mv^2/2 = mg$, soit $v = \sqrt{2gh}$. Si le choc est élastique, le sol encaisse une quantité de mouvement P de l'ordre de $p = mv$ ou plutôt $2p$ (il faut amortir la balle et la renvoyer), ce qui correspond à une énergie cinétique $P^2/(2M)$, négligeable par rapport à l'énergie $p^2/(2m)$ de la balle, car la masse de la Terre M est infiniment plus grande que celle de la balle. S'il y a conservation de l'énergie, la balle rebondit avec une vitesse ascendante de même module v et remonte donc à la même hauteur h .

On observe qu'en réalité, la vitesse v' (en module) après le rebond est

$$v' = ev, \quad (3.26)$$

où e est le *coefficient de restitution*. La balle rebondit à la hauteur he^2 , retombe, atteint le sol de nouveau à la vitesse ev , rebondit avec la vitesse ve^2 , remonte à he^4 , etc.

Le parcours (depuis le lâcher) est

$$L = h + 2he^2 + 2he^4 + \dots = \frac{2h}{1 - e^2} - h = h \frac{1 + e^2}{1 - e^2}, \quad (3.27)$$

On peut aussi calculer le temps du processus, fini. L'unité naturelle est le temps $\tau = \sqrt{2h/g}$ de la première chute, et on a en tout

$$T = \tau + 2\tau e + 2\tau e^2 + \dots = \tau \frac{1 + e}{1 - e}. \quad (3.28)$$

3.13 Démonstration de la loi de Dalton

On pourra sauter cette section en première lecture.

Nous allons donner ici un exemple de l'application de la mécanique à la thermodynamique. Voir le cours de thermodynamique, chapitre théorie cinétique des gaz, ou thermodynamique statistique pour beaucoup d'autres exemples.

Ce que nous apprend la thermodynamique, c'est que dans une mole de gaz monoatomique contenant \mathcal{N} atomes, soit $6\mathcal{N}$ degrés de liberté (position, vitesse de chaque particule), il a en fait un très petit nombre de paramètres essentiels, qui mesurent l'effet moyen des degrés de liberté microscopiques. En particulier, la température $\tau = 3kT/2 = \langle mv^2/2 \rangle$ mesure l'agitation moyenne dans un gaz. Le facteur $3/2$ est une commodité, pour rappeler qu'il y a trois degrés de liberté de translation. Le facteur k , la constante de Boltzmann, est introduit pour faire le lien avec les unités historiques de température, avant que l'on

ne réalise que la température est en fait une énergie. Pourquoi avoir choisi pour la température une quantité proportionnelle à $\langle mv^2/2 \rangle$, alors que $\langle |v| \rangle$, ou $\langle m^2 v^4 \rangle$, etc. mesureraient aussi bien l'état d'agitation. La réponse, c'est que la température ainsi définie est celle qui se transmet, entre un liquide et sa paroi, entre une main froide et un front chaud, ou entre deux gaz différents mélangés, si le contact est suffisamment long pour qu'un équilibre s'établisse.

Supposons que dans un même récipient, on mélange de l'Hélium et du Néon, ou deux autres gaz. Pour l'un, les molécules ont masse m et vitesse \mathbf{v} , si bien qu'un observateur avec forte capacité de filtrage, insensible à l'autre gaz, identifierait une température $t = mv^2/(3k)$ pour cette population. Pour l'autre gaz, on a les quantités M , \mathbf{V} et T .

Imaginons un choc entre une molécule d'hélium et une de Néon. On peut écrire les vitesses initiales

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{m + M} + \frac{M}{m + M}(\mathbf{v} - \mathbf{V}), \\ \mathbf{V} &= \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{m + M} - \frac{m}{m + M}(\mathbf{v} - \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le premier terme est conservé vectoriellement, car proportionnel à la quantité de mouvement totale. le second est conservé en module, car il entre explicitement dans l'énergie cinétique, si on écrit la décomposition de König. Si on introduit un vecteur unitaire \hat{u} , les vitesses finales dont du type

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{m + M} + \frac{M}{m + M}|\mathbf{v} - \mathbf{V}|\hat{u}, \\ \mathbf{V}' &= \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{m + M} - \frac{m}{m + M}|\mathbf{v} - \mathbf{V}|\hat{u}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les molécules ayant ce type de vitesse auront des paramètres d'impact variant arbitrairement et (voir diffusion par sphère dure) repartiront avec des \hat{u} distribués isotropiquement. Ce qui signifie, pour l'énergie cinétique de cette population,

$$\langle v'^2 \rangle = \left| \frac{m\mathbf{v} + M\mathbf{V}}{m + M} \right|^2 + \left| \frac{M}{m + M}(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \right|^2, \quad (3.31)$$

et de même pour \mathbf{V}' . Si on étend la moyenne à l'ensemble des molécules, les produits $\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}$ seront nuls en moyenne, et on obtient pour $t \propto m\langle v^2 \rangle$ et $T \propto M\langle V^2 \rangle$,

$$\begin{cases} t \\ T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t' = \frac{(m^2 + M^2)t + 2mMT}{(m + M)^2}, \\ T' = \frac{2mMt + (m^2 + M^2)T}{(m + M)^2}, \end{cases} \quad (3.32)$$

qui peut être considérée comme une paire de suites récurrentes couplées. La limite doit satisfaire $t' = t = t_\infty$ et $T' = T = T_\infty$. On montre facilement que la suite converge. Mais la limite (t_∞, T_∞) doit satisfaire

$$\begin{aligned} t_\infty &= \frac{(m^2 + M^2)t_\infty + 2mMT_\infty}{(m + M)^2}, \\ T_\infty &= \frac{2mMt_\infty + (m^2 + M^2)T_\infty}{(m + M)^2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ces équations linéaires et homogènes n'ont pas de solution unique (qui serait $t = T = 0$) car leur déterminant est nul. Mais la solution satisfait ¹

$$t_\infty = T_\infty, \quad (3.34)$$

ce qui établit la loi de Dalton : deux gaz, en se mélangeant, finissent par avoir la même température.

Le bilan sommaire ci-dessus est insuffisant pour donner la valeur commune. On sait bien que celle-ci dépendra des proportions initiales de chaque gaz.

3.14 Mouvement d'une fusée

Une fusée se déplace en éjectant vers l'arrière du gaz avec une vitesse u (par rapport à la fusée) et un débit massique ρ (en kg/s). C'est une désintégration continue.

Soit $m(t)$ la masse de la fusée, de valeur initiale M et de valeur finale m_0 , quand les réservoirs sont vides. Soit $V(t)$ la vitesse de la fusée. À l'instant t , dans le référentiel galiléen qui coïncide momentanément avec la fusée, celle-ci et le gaz prêt à être éjecté ont une vitesse nulle. À l'instant $t + dt$, le bilan de quantité de mouvement donne

$$m(t)dV(t) = u \rho dt, \quad (3.35)$$

où $u = |\mathbf{u}|$. Comme une différence de vitesse, un accroissement de vitesse est indépendant du référentiel considéré, et on a dans le référentiel d'observation

$$m(t)\dot{V}(t) = u\rho. \quad (3.36)$$

soit, comme $dm(t) = -\rho dt$,

$$\dot{V}(t) = -u \frac{\dot{m}}{m(t)}. \quad (3.37)$$

qui s'intègre en

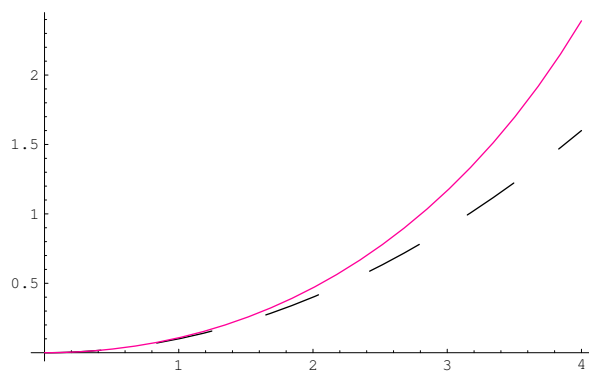
$$V(t) = u \ln \left[\frac{M}{m(t)} \right]. \quad (3.38)$$

Quand les réservoirs sont vides, $m(t) = m_0$, et la vitesse reste figée à la valeur acquise, $u \ln(M/m_0)$. On n'a eu besoin jusqu'ici de supposer que le débit ρ des tuyères est constant. Si c'est le cas, $m(t) = M - \rho t$, et on peut calculer la loi horaire explicitement (il faut se souvenir que $t \ln t - t$ est une primitive de $\ln t$)

$$x(t) = ut - \frac{ut}{\rho}(M - \rho t) \ln M/(M - \rho t), \quad (3.39)$$

que l'on peut comparer à l'approximation $u\rho t^2/(2M)$ que l'on aurait en prenant la force de poussée initiale constante appliquée à une masse constante M . L'allégement progressif donne un supplément de vitesse. Voir figure, en trait plein coloré la loi $x(t)$ réelle, en pointillés, l'approximation de force et masse figées à leur valeur initiale.

¹Si on retranche les deux équations membre à membre, on obtient $(M + m)^2(t_\infty - T_\infty) = (M - m)^2(t_\infty - T_\infty)$, ce qui implique que $t_\infty - T_\infty = 0$.



Chapitre 4

Moment cinétique d'un système de points

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons quelques rappels sur le moment cinétique d'une particule et les théorèmes qui lui sont associés. Nous présentons ensuite le moment cinétique d'un système avec diverses variantes, selon le référentiel adopté, les relations entre elles et les théorèmes auxquelles elles obéissent.

Ce chapitre est parfois un peu formel. Il faudra savoir dégager l'essentiel requis pour les applications élémentaires.

4.2 Moment cinétique pour un point matériel

Par définition ; le moment cinétique par rapport à O d'une particule située en M est le moment de la quantité de mouvement \mathbf{p} , soit

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OM} \times \mathbf{p} . \quad (4.1)$$

Il obéit donc à l'équation de transport

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AO} \times \mathbf{p} + \mathbf{L}_O . \quad (4.2)$$

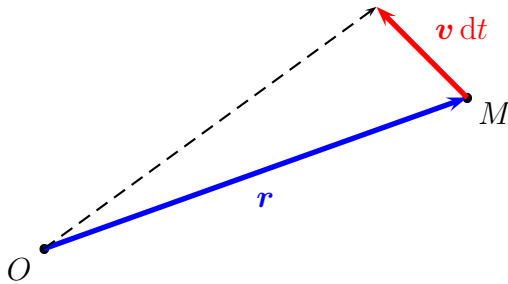
La version la plus simple du théorème du moment cinétique est celle correspondant à un point fixe O , dans un référentiel galiléen. La dérivée de \mathbf{OM} est parallèle à \mathbf{p} . Quand on dérive \mathbf{L}_O seul le terme de la dérivée de \mathbf{p} contribue. Comme $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$, la résultante des forces, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{OM} \times \mathbf{f} \equiv \mathcal{M}_O(\mathbf{f}) , \quad (4.3)$$

qui s'énonce ainsi : *la dérivée du moment cinétique est égale au moment de la résultante des forces.*

Si on considère le moment cinétique par rapport à un point A mobile, le théorème reste vrai si la vitesse de A , \mathbf{v}_A est parallèle à la vitesse \mathbf{v} du point matériel. Sinon,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_A = \mathbf{AM} \times \mathbf{f} - \mathbf{v}_A \times \mathbf{p} . \quad (4.4)$$



Interprétation du moment cinétique. Pendant un court instant dt , la particule parcourt un arc assimilable à un petit segment $v dt$. La droite OM balaie donc un petit triangle d'aire $|\mathbf{OM} \times v dt|$. On voit que $|\mathbf{L}|$ est m fois la surface balayée divisée par dt , soit m fois la *vitesse aréolaire*. Si on a orienté le plan du mouvement instantané, le sens de \mathbf{L}_O sur la normale à ce plan, indique si l'on tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif autour de O .

Si \mathbf{L}_O est conservé, ce qui est le cas pour les mouvement à force centrale passant par O , alors si on prend des coordonnées polaires d'origine O dans le plan du mouvement, qui est le plan passant par O perpendiculaire à \mathbf{L}_O , alors on a la *loi des aires*

$$r^2 \dot{\vartheta} = C = L_O / m . \quad (4.5)$$

4.3 Application au pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une masse m ponctuelle en M au bout d'une corde de longueur ℓ , dont l'autre extrémité est accrochée à un pont fixe O . Le mouvement se déroule dans des conditions telles que la corde reste tendue. On suppose la corde inextensible, et de masse négligeable. Elle n'exerce alors de force que dans sa direction. (Il faudra vérifier ultérieurement qu'il s'agit d'un traction, car une corde souple ne peut pousser, à la différence d'un tige rigide.) Le point matériel est soumis à deux forces : l'une est parfaitement connue, c'est le poids $m\mathbf{g}$; de l'autre, la tension \mathbf{T} de la corde, on ne connaît que la direction.

Une possibilité d'éliminer la tension est d'écrire le théorème du moment cinétique par rapport au point d'attache O . On obtient

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{OM} \times m\mathbf{g} . \quad (4.6)$$

Il y a deux cas particuliers plus faciles à résoudre.

4.3.1 Mouvement de rotation

La vitesse reste constamment horizontale et pendule garde toujours la même inclinaison, soit ϑ par rapport à son axe vertical, Dans des coordonnées cylindriques, on évalue $\mathbf{OM} = (\ell \sin \vartheta, 0, -\ell \cos \vartheta)$, $\mathbf{p} = (0, \ell \omega \sin \vartheta$ et $m\mathbf{g} = (0, 0, -mg)$. Le théorème vectoriel (4.3) n'a de composante intéressante que sur le vecteur orthoradial et donne

$$m\ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \omega^2 = mg\ell \sin \vartheta \omega , \quad (4.7)$$

soit $\omega = g/(\ell \sin \vartheta)$ (qu'on peut évidemment retrouver par d'autres méthodes), qui exprime la vitesse angulaire à inculquer en fonction de l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale.

4.3.2 Pendule dans un plan vertical

Si le pendule est lancé dans un plan vertical, on peut projeter (4.6) sur un axe perpendiculaire, et obtenir pour l'inclinaison $\vartheta(t)$ par rapport à la verticale, maintenant variable,

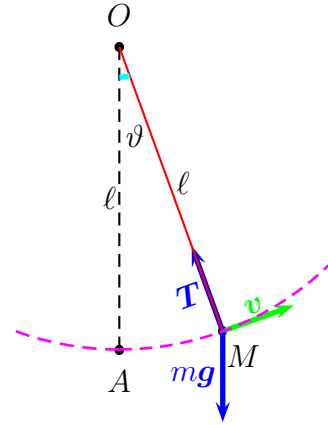
l'équation bien connue

$$m\ell\ddot{\vartheta} = -mg\ell \sin \vartheta, \quad (4.8)$$

que l'on peut résoudre exactement (avec des fonctions elliptiques) ou à l'approximation des petites oscillations et que l'on peut vérifier par des considérations d'énergie, en exploitant la propriété intéressante que la tension de la corde ne travaille pas, soit

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + mg\ell(1 - \cos \vartheta) = C^{\text{te}}. \quad (4.9)$$

Insistons que le fait que l'équation (4.8) n'est préférable qu'à l'approximation des petites oscillations. Une équation du premier ordre est presque toujours préférable à une équation du second ordre. C'est le cas pour le pendule si on veut aller au-delà de l'approximation des petites oscillations.



4.4 Décomposition de König du moment cinétique

Pour un système de points matériels, le moment cinétique par rapport à un point O est

$$L_O = \sum_i \mathbf{OM}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (4.10)$$

So on écrit $\mathbf{OM} = \mathbf{OG} + \mathbf{GM}$ et pour les vitesses, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}^*$ et que l'on insère dans la définition ci-dessus, on remarque que les termes linéaires en \mathbf{OG} ou en \mathbf{v}_G disparaissent car $\sum m_i \mathbf{GM}_i$ et $\sum m_i \mathbf{v}_i^*$ sont nuls. Il reste

$$L_O = \mathbf{OG} \times M \mathbf{v}_G + \sum_i \mathbf{GM}_i \times m_i \mathbf{v}_i^* = L_0(G) + L^*, \quad (4.11)$$

c'est-à-dire que le moment cinétique est la somme d'un terme collectif qui est le moment en O de la quantité de mouvement totale affectée au centre de masse, et d'un terme de mouvement relatif, qui est le moment cinétique en G dans le référentiel lié à G .

4.5 Lois d'évolution du moment cinétique

On reprend les notations de la section 2.6. Chaque particule est soumise à une force extérieure \mathbf{f}_i et à un ensemble de forces intérieures $\mathbf{F}_{i \leftarrow j}$ supposées obéir au principe de l'action et de la réaction et parallèles à $\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j$.

Si on considère d'abord le moment cinétique collectif

$$\mathbf{L}_O(G) = \mathbf{OG} \times M\mathbf{v}_G, \quad (4.12)$$

premier terme de la décomposition de König, on obtient en dérivant, exactement comme pour une particule matérielle

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O(G) = \mathbf{OG} \times \mathbf{f}_{\text{ext}}, \quad (4.13)$$

si O est *immobile*, sinon on ajoute le terme $-\mathbf{v}_O \times M\mathbf{v}_G$, comme dans (4.4). Ici, \mathbf{f}_{ext} est la somme des forces extérieures \mathbf{f}_i .

Passons au terme du centre de masse, soit

$$\mathbf{L}^* = \sum_i \mathbf{GM}_i \times m_i \mathbf{v}_i^*. \quad (4.14)$$

Quand on dérive, la dérivée de \mathbf{GM}_i est \mathbf{v}_i^* et ne contribue pas. Reste la dérivée de la vitesse. Ici, on peut se souvenir (voir démonstration de la décomposition de König) que \mathbf{L}^* peut aussi s'écrire

$$\mathbf{L}^* = \sum_i \mathbf{GM}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (4.15)$$

On peut plus facilement dériver sous cette forme, en appliquant la loi de Newton à chaque particule dans le référentiel choisi au départ et supposé galiléen. On fait apparaître la somme des forces exercées sur chaque particule. Mais

$$\mathbf{GM}_1 \times \mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} + \mathbf{GM}_2 \times \mathbf{F}_{2 \leftarrow 1} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \times \mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = 0, \quad (4.16)$$

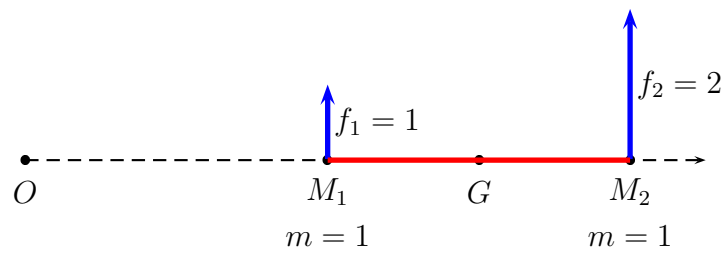
en vertu des propriétés des forces intérieures. On trouve donc que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}^* = \sum_i \mathbf{GM}_i \times \mathbf{f}_i, \quad (4.17)$$

c'est-à-dire que l'évolution est gouvernée par le moment résultant des forces extérieures. Ce résultat est remarquable, car les forces d'inertie ne contribuent pas, alors que le référentiel lié à G n'est pas nécessairement galiléen. Comment est-ce possible ?

Le référentiel lié à G est choisi (voir la sous-section 2.2.4) en translation par rapport au référentiel où l'on étudie le mouvement, supposé galiléen. Il n'y a pas de force de Coriolis. Les forces d'inertie d'entraînement sont $-m_i \mathbf{a}_G$. Leur moment en G est $[-\sum_i m_i \mathbf{GM}_i] \times \mathbf{a}_G$. On voit qu'il est nul.

Exemple. Supposons que deux masses égales à $m = 1$ kg, séparées de 1 m, plus précisément placées en $(1, 0)$ et $(2, 0)$. soient soumises à deux forces, parallèles, de même sens, perpendiculaires à la séparation, de module $f_1 = 1$ N et $f_2 = 2$ N. Quel est le mouvement initial ?



Réponse. Le centre de masse a une accélération $a = 1,5 \text{ m/s}^2$. Il tourne autour de O avec un moment cinétique qui augmente avec un taux de $1,5 \text{ N.m}$. Le système tourne autour de G avec un moment cinétique qui augmente avec un taux de $0,5 \text{ N.m}$.

Chapitre 5

Rappels sur les forces centrales

5.1 Définition

Au sens large, une force centrale \mathbf{f} , de centre de force O , appliquée sur une particule située au point M , est parallèle au vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$, soit $\mathbf{f} \parallel \mathbf{r}$, où \hat{r} est le vecteur unitaire \mathbf{r}/r , ailleurs noté \mathbf{u}_r .

En général, on suppose implicitement la *définition plus restreinte* d'une force dont la mesure algébrique est isotrope, soit $\mathbf{f} = f(r)\hat{r}$,

On fera ce dernier choix. Mais on pourra vérifier que certains résultats restent valables avec la définition plus large de la force centrale.

5.2 Forces centrales et forces keplériennes

On a tendance parfois à énoncer des résultats valables pour toute force centrale comme spécifiques aux forces $\propto r^{-2}$, par exemple la loi des aires, première loi de Kepler.

Inversement, on attribue parfois à n'importe quelle force centrale des propriétés qui ne sont vraies que pour des formes très particulières de $f(r)$, comme le caractère fermé des trajectoires, ou le fait qu'elles sont des coniques dont le centre de force est un foyer.

La vérité est toute force centrale attractive peut exceptionnellement donner une trajectoire fermée, avec des conditions initiales très particulières. Mais seule la loi de force harmonique $f(r) \propto r^2$ donne des trajectoires toujours fermées. La loi de force coulombienne attractive, ou keplérienne, $f(r) = -K/r^2$, avec $K > 0$, a la particularité que les trajectoires qui ne partent pas à l'infini sont fermées. Ce sont les deux seules possibilités, comme le stipule le théorème de Bertrand.

On trouve des ellipses de *centre* O pour la force harmonique, des coniques de *foyer* O pour les forces coulombiennes. Mais pour une force centrale quelconque, la trajectoire n'est pas en général une conique.

5.3 Mouvement plan

Soit une particule située initialement en \mathbf{r}_0 avec une vitesse \mathbf{v}_0 et soumise à une force centrale. L'accélération est parallèle à \mathbf{r}_0 , et donc ne fait pas sortir du plan $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Le mouvement restera dans ce plan.

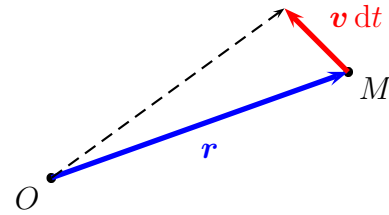
Dans le cas particulier où $\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v}_0$, le mouvement est rectiligne.

On voit qu'on peut généraliser le raisonnement et obtenir un mouvement plan pour une loi de force du type $\mathbf{f} = a(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{r} + b(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}$, par exemple à une loi de force centrale additionnée d'une force de frottement.

5.4 Loi des aires

Revenons à une force centrale $\mathbf{f} \parallel \mathbf{r}$. Le moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ est conservé. On retrouve le caractère plan du mouvement, dans le plan $\perp \mathbf{L}$.

Considérons un intervalle de temps dt . La particule parcourt $\mathbf{v} dt$. Le rayon vecteur balaie une surface, qui au second ordre près, est le triangle $(\mathbf{r}, \mathbf{v} dt)$, dont l'aire est la moitié du module de $\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt$, soit $|\mathbf{L}| dt / (2m)$. On peut aussi convenir d'une aire algébrique, positive si on tourne dans le sens direct, négative dans l'autre cas, avec la corrélation habituelle entre le sens de rotation dans le plan et l'orientation de l'axe normal au plan.



En définitive,

$$L = 2m\dot{A} = mC, \quad (5.1)$$

où l'usage, hélas, amène à définir deux quantités redondantes, la *vitesse aréolaire* \dot{A} et la *constante des aires* C , qui sont conservées, tout comme L .

Les conséquences *qualitatives* de la loi des aires sont assez faciles à déduire, et on peut les analyser avant de se lancer dans des calculs. Par exemple, une vitesse orthoradiale plus importante quand elle se rapproche du centre de force. Si la trajectoire s'enroule sur elle-même, elle entoure le centre de force, nécessairement. Par exemple, on a très facilement des trajectoires circulaires dont le centre est le centre de force ; en transpirant un peu (chercher à titre d'exercice), on peut trouver une loi de force et des conditions initiales telle que le mouvement soit un cercle qui contient le centre de force O mais n'a pas O pour centre. On chercherait en vain une force centrale amenant à une trajectoire circulaire dont O serait extérieur.

Pour un mouvement à force centrale, il est souvent¹ commode d'utiliser des coordonnées polaires de centre O pour décrire ce mouvement plan. Soient r et ϑ de telles coordonnées, \hat{r} et $\hat{\vartheta}$ les vecteurs unitaires du repère mobiles, qui indiquent la direction et le sens de

¹Pas toujours, voir par exemple le mouvement harmonique déjà cité.

progression de ces coordonnées. On a alors, d'une façon très générale,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{r}, & \mathbf{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\vartheta}\hat{\vartheta}, \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{\vartheta} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta})\hat{\vartheta}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans le cas d'une force centrale, l'accélération orthoradiale s'annule, et on retrouve la loi des aires

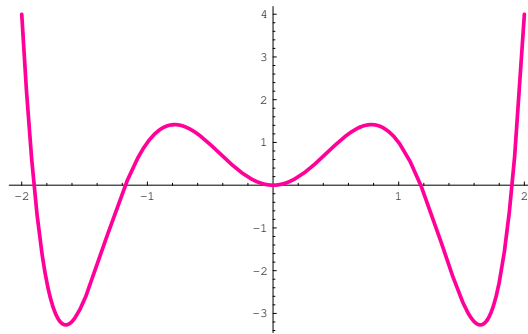
$$r^2\dot{\vartheta} = C = L/m. \quad (5.3)$$

5.5 Potentiel effectif et discussion qualitative des trajectoires

Dans le cas de la mécanique à une dimension, avec des forces conservatives (qui dérivent d'un potentiel), on sait tout le parti qu'on peut tirer de la loi de conservation

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E, \quad (5.4)$$

avec les notations habituelles. Prenons le cas où $U(x)$ aurait un profil de chapeau mexicain (voir figure). Selon le point de départ, et la valeur de l'énergie conservée E , on aura des oscillations près d'un minimum local, ou avec franchissement de bosses.



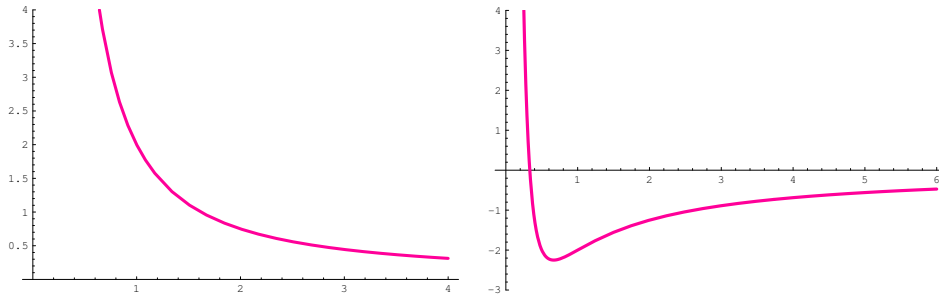
On peut se ramener à cette situation dans le cas de forces centrales conservatives. Dans l'énergie cinétique, il y a en effet une contribution orthoradiale $r^2\dot{\vartheta}^2$ à v^2 , qui peut être transformée en utilisant la loi des aires $r^2\dot{\vartheta} = C$. Si on regroupe ce terme avec le potentiel $U(r)$ dont dérive la force isotrope $f(r)\hat{r}$, avec donc $f(r) = -dU/dr$, on obtient le bilan d'énergie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E, \quad V_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{mC^2}{2r^2}. \quad (5.5)$$

Cette équation est strictement identique à (5.4), mais r ne varie ici que de 0 à $+\infty$.

Prenons trois exemples.

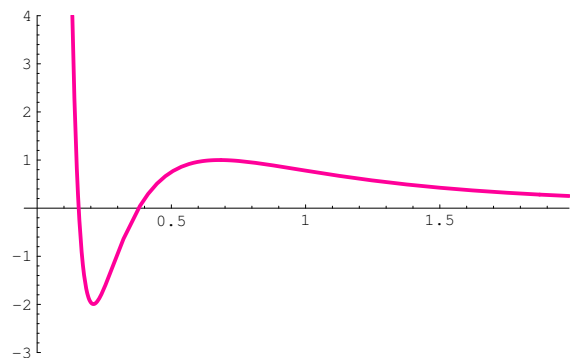
1. Pour un potentiel coulombien répulsif, $V_{\text{eff}}(r)$ est positif et décroissant. Si, à l'instant $t = 0$, on s'éloigne ($\dot{r} > 0$), on le fait indéfiniment. Si on se rapproche du centre, on arrive à une distance minimale (telle que $V_{\text{eff}}(r) = E$), puis la particule s'éloigne inexorablement.



2. Pour un potentiel keplerien, si $E > 0$, la particule s'éloigne, ou bien se rapproche puis s'éloigne. Il s'agit des trajectoires hyperboliques. Si $E < 0$, la particule reste coincée entre les deux valeurs de r telles que $V_{\text{eff}}(r) = E$, l'apogée et le périhélie, ce qui correspond aux trajectoires elliptiques.
3. Considérons un potentiel de Yukawa, $U(r) = g \exp(-\mu r)/r$, qui est un modèle possible pour une interaction coulombienne écrantée dans un milieu, la force intermoléculaire de longue portée (très schématiquement) ou les forces entre nucléons dans les noyaux, avec bien-sûr, des ordres de grandeur très différents pour l'intensité g et la portée μ d'un cas à l'autre.

Il y a de nombreux profils possibles pour le potentiel effectif, selon les valeurs de C , g et μ . Supposons que les valeurs numériques soient telles que le potentiel effectif, dans les unités du problème, soit proportionnel à $1/r^2 - 12 \exp[-4r]/r$, ce qui correspond à la figure.

Pour $E < 0$, on a mouvement borné (mais la trajectoire ne sera pas fermée comme une ellipse). Pour $0 \leq E \lesssim 1$ (dans ces unités), on a aussi une trajectoire qui reste à distance finie, bien que la particule ait virtuellement assez d'énergie pour aller à l'infini^a. Si $E \gtrsim 1$, la particule part à l'infini.



^aEn physique quantique, la particule aurait une petite probabilité de franchir la barrière de potentiel, en violant très temporairement la conservation de l'énergie. C'est là l'explication de la radioactivité α , par exemple.

5.6 Équations de Binet

Cette section est intéressante pour les aspects géométriques du mouvement à force centrale. Il ne faut surestimer son importance. On entend parfois, à l'oral : «C'est un problème à force centrale, donc il faut utiliser les équations de Binet», même quand les équations de Binet ne sont pas vraiment requises pour le problème posé.

L'idée de base est que la loi des aires donne $d\vartheta/dt = C/r^2$, ce qui permet de transformer les dérivées temporelles qui interviennent dans la vitesse et l'accélération en dérivées par rapport à ϑ , et donc de transformer les équations de la dynamique en équations différentielles pour la trajectoire. Par exemple le bilan d'énergie

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 + U(r) = E, \quad (5.6)$$

peut se lire, puisque

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\vartheta} \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta}, \quad (5.7)$$

$$\frac{C^2m}{2r^4} \left(\frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{C^2m\dot{\vartheta}^2}{2r^2} + U(r) = E, \quad (5.8)$$

qui est une équation différentielle du premier ordre pour la trajectoire $r(\vartheta)$, en coordonnées polaires.

Les expressions se simplifient un peu si on considère non pas r , mais $u = 1/r$, comme une fonction de ϑ , avec les notations $u' = du/d\vartheta$, etc. On démontre (le faire à titre d'exercice) que

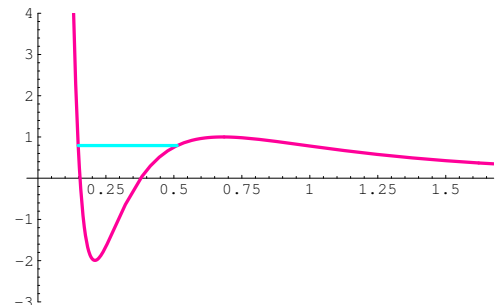
$$\mathbf{v} = C(u\hat{r} + u'\hat{\vartheta}), \quad \mathbf{a} = -C^2u^2(u + u'')\hat{r}. \quad (5.9)$$

Pour une force centrale $f(r) = -dU(r)/dr$, la fonction $u(\vartheta)$ qui caractérise la trajectoire obéit aux équations différentielles

$$\frac{mC^2}{2}(u'^2 + u^2) + U(1/u) = E, \quad mC^2u^2(u'' + u) = f(u^{-1}). \quad (5.10)$$

La première équation, du premier ordre et séparable, contient plus d'information (via E) que la seconde et doit être privilégiée. La seconde ne s'avère commode que dans le cas coulombien.

Exemple. Supposons que l'on ait choisi des unités de masse, énergie, distance, etc., telles que $m = 2$, $U(r) = -12 \exp(-4r)/r$, et que les conditions initiales soient telles que $r_0 = 0,5$, $\dot{\vartheta}_0 = 16$ (donc $C = 1$) et $\dot{r}_0 = 0,2$. Comme $C = 1$, on a le potentiel effectif V_{eff} de la figure ci-dessus, et l'énergie totale peut se calculer à $t = 0$ comme valant $E = V_{\text{eff}}(r_0) + m\dot{r}_0^2/2 = 0,792$. C'est en dessous du sommet de la barrière. La particule va donc osciller entre les deux valeurs de distances r telles que $V_{\text{eff}} = E$, soit $r_1 = 0,148$ le péricentre et $r_2 = 0,512$ l'apocentre.



La dérivée u' sera alternativement positive ou négative selon que r décroît ou croît. On a des oscillations régulières de u en fonction de ϑ , ce qui signifie qu'entre r_1 et r_2 , la particule tourne du même angle ϑ , de la même façon que pour un mouvement oscillant, il y a toujours

le même intervalle de temps entre deux extrema successifs, une demi- période. Le temps est remplacé par l'angle, c'est là toute l'astuce des équations de Binet. Quand $u' > 0$, l'équation énergétique $u'^2 + u^2 - 12u \exp(-4/u) = E = 0.792$ s'écrit

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{\sqrt{E - u^2 + 12u \exp(-4/u)}}, \quad (5.11)$$

qui permet de calculer l'angle $\Delta\vartheta$ dont on tourne entre l'apocentre $u_2 = 1/r_2 = 1.95$, et le péricentre $u_1 = 1/r_1 = 6.75$. On obtient

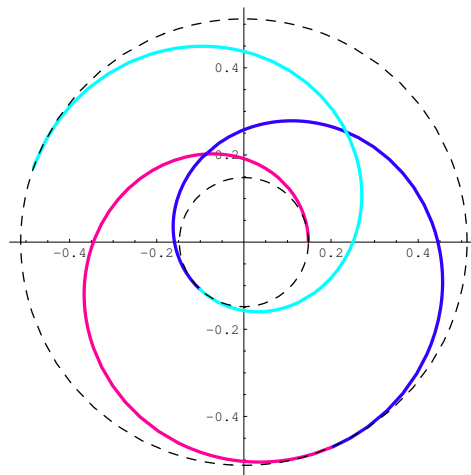
$$\Delta\vartheta = \int_{u_2}^{u_1} \frac{1}{\sqrt{E - u^2 + 12u \exp(-4/u)}} du \simeq 5.12, \quad (5.12)$$

soit environ 293° . On vérifie que ce n'est pas π ou $\pi/2$ etc., autrement dit qu'en un nombre fini de tours, on ne reviendra pas à la position initiale : la trajectoire n'est pas fermée, bien que $r(\vartheta)$ soit une fonction périodique de ϑ !

Plus généralement, on peut calculer de combien la particule a tourné quand elle passe de par exemple, $u = u_2$ à une autre valeur de u , soit

$$\vartheta = \int_{u_2}^u \frac{1}{\sqrt{E - u^2 + 12u \exp(-4/u)}} du, \quad (5.13)$$

et si on dispose d'un bon² logiciel d'intégration numérique, on peut tracer la courbe point par point, puisqu'on connaît une représentation paramétrique $\{r = 1/u, \vartheta(u)\}$. Si on a tracé la décroissance de l'apocentre au péricentre, le reste se déduit par symétrie. Voir figure.



²Ce sont des intégrales délicates, car l'intégrant explose au voisinage de u_1 et u_2 .

5.7 Cas du potentiel harmonique

Un exemple particulièrement simple de potentiel central est $U(r) = Kr^2/2$, qui décrit un ressort de raideur K , de longueur à vide négligeable, exerçant une force de rappel $\mathbf{f} = -\text{grad } U = -Kr$.

Le traitement en coordonnées polaires donnerait des calculs lourds dont la résolution aboutirait à l'équation polaire de l'ellipse par rapport à son centre, notoirement compliquée³.

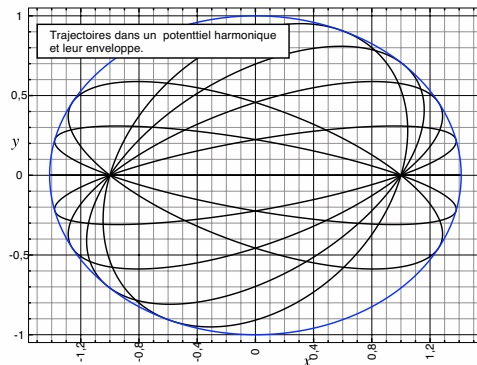
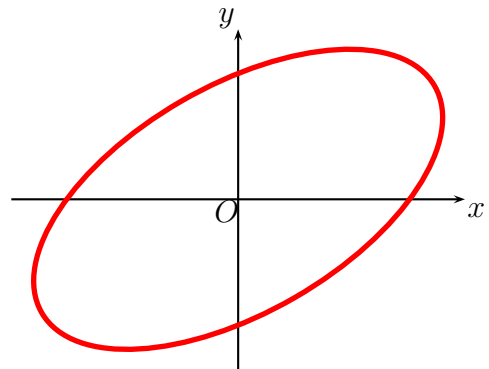
En fait l'équation de Newton $m\mathbf{a} = -Kr$ peut se projeter sur deux axes du plan du mouvement, donnant $m\ddot{x} + Kx = 0$ et la même chose pour y . On résoud en

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + (\dot{x}_0/\omega) \sin(\omega t), \\ y(t) &= y_0 \cos(\omega t) + (\dot{y}_0/\omega) \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{5.14}$$

où le fait remarquable est que la pulsation $\omega = (k/m)$ est indépendante de l'amplitude. Les oscillations le long de x et le long de y sont synchrones, et la particule revient exactement au même point après une période $T = 2\pi/\omega$.

Si on a la chance de partir de l'un des sommets, c'est à dire si (5.14) se réduit à $x = a \cos(\omega t)$ et $y = b \sin(\omega t)$, on trouve facilement l'équation cartésienne de la trajectoire, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Dans le cas le plus général, on a toujours le centre en O , mais les axes sont inclinés : l'équation cartésienne contient un terme en xy .

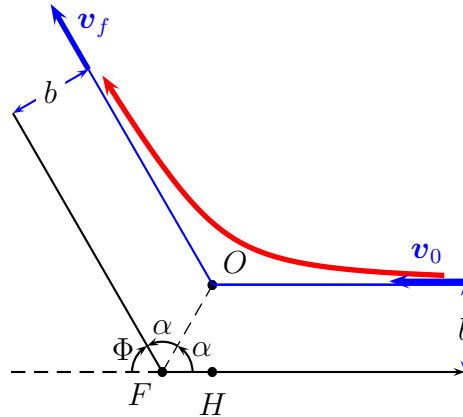
À titre d'exercice, on peut envisager une série de lancements du même point, avec une vitesse toujours de même module v_0 mais d'orientation variable. On obtient une famille d'ellipses et on peut chercher quelle est leur enveloppe, qui est l'analogue de la parabole de sûreté en balistique classique, que nous reverrons au chapitre suivant. On démontrera que l'enveloppe est une ellipse de centre O dont le point de lancement commun est l'un des foyers.



5.8 Diffusion par un centre de forces

Le prototype est la diffusion Rutherford : une particule arrive de l'infini avec une vitesse v_0 et un paramètre d'impact b . Elle repart en suivant asymptotiquement une nouvelle droite et on s'intéresse à sa déviation.

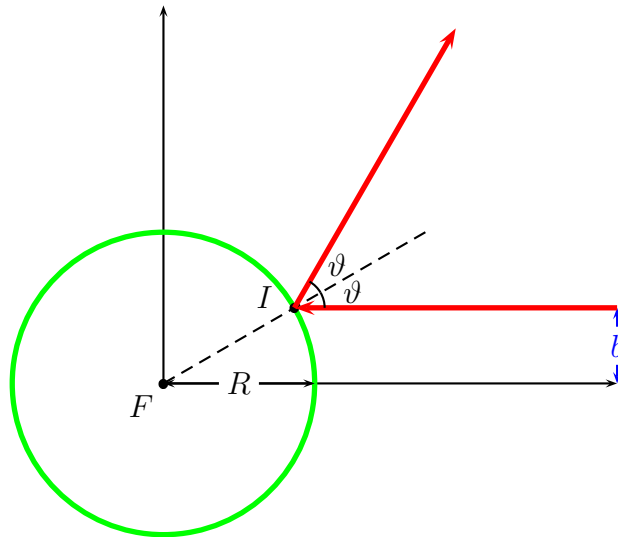
³à la différence de l'équation polaire par rapport à un foyer, qui interviendra dans le chapitre suivant



Par conservation de l'énergie mécanique entre $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$, la particule repart avec une vitesse finale v_f de module $v_f = v_0$. La conservation du moment cinétique implique que le paramètre de sortie est égal à b . Il reste à déterminer la loi qui exprime la déviation Φ en fonction de b et de v_0 .

Deux cas remarquables peuvent être mentionnés.

La sphère dure. En arrivant à la distance R du centre de force F , la particule subit une réflexion selon la loi de Descartes. Il y a une symétrie évidente qui permet de supposer $b > 0$. Si $b > R$, il ne se passe rien. Si $b < R$, il y a impact sur la sphère au point d'argument ϑ tel que $\sin \vartheta = b/R$. L'angle d'incidence est donc $\pi/2 - \vartheta$, que l'on retrouve à la réflexion, mais de l'autre côté de la normale. On trouve facilement que $\Phi = 2\vartheta = 2 \arcsin(b/R)$.



La diffusion coulombienne On verra au chapitre suivant que si la force est $\mathbf{f} = K\mathbf{r}/r^3$, où $\mathbf{r} = \mathbf{FM}$, alors la trajectoire est une hyperbole, comme sur la figure, qui correspond à un cas répulsif ($K > 0$), et la déviation est donnée par

$$\tan(\Phi/2) = \frac{K}{mv_0^2 b}. \quad (5.15)$$

On remarque que $\Phi \rightarrow 0$ si $K \rightarrow 0$ (il n'y a pas d'interaction), ou $m \rightarrow \infty$ (la particule a trop d'inertie pour être influencée) ou $v_0 \rightarrow \infty$ (même chose).

Formule générale pour la déviation. Le raisonnement est le même que pour l'orbite avec un potentiel de Yukawa. Soit $G(u) = U(1/u)$ l'énergie potentielle comme fonction de $u = 1/r$. Le bilan d'énergie (5.10) s'écrit, avec $E = mv_0^2/2$ et $C = bv_0$,

$$u'^2 + u^2 - b^{-2} + 2G(u)/(mv_0^2b^2) = 0 . \quad (5.16)$$

Pour $u' = 0$, si le potentiel est suffisamment régulier, on obtient la valeur où la distance est minimale, soit $r_1 = 1/u_1$. Par raison de symétrie, il y a le même angle α entre le départ à l'infini ($u = 0$) et l'approche minimale ($u = u_1$) qu'entre cette approche minimale et l'éloignement à l'infini. La rotation du rayon vecteur pendant la diffusion est 2α et la déviation est $\pi - 2\alpha$. Voir figure.

On exploite le caractère séparable de l'équation pour extraire non pas $u(\vartheta)$ mais sa fonction réciproque $\vartheta(u)$, et finalement

$$\Phi = \pi - 2\alpha , \quad \alpha = \int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{b^{-2} - u^2 - 2G(u)/(mv_0^2b^2)}} . \quad (5.17)$$

À titre d'exercice, on vérifiera que cette formule générale permet de retrouver le cas d'une sphère dure ($G(u) = 0$ pour $u < R^{-1}$ et $G(u) = +\infty$ si $u > R^{-1}$) ainsi que la formule de Rutherford pour $G(u) = Ku$.

Notion de section efficace.

On pourra sauter en première lecture.

En pratique, dans la physique microscopique, on ne peut vérifier la loi de force en mesurant la déviation en fonction du paramètre d'impact pour chaque événement particulier. Ce que l'on peut faire, c'est un comptage statistique : on mesure le nombre de particules recueillies dans un petit angle solide (correspondant à l'ouverture d'un module de détecteur) autour d'une valeur donnée de la déviation Φ .

Le raisonnement est le suivant. Si on a faisceau homocinétique de densité n (en nombre de particules par seconde et par mètre carré), le nombre de particules par seconde de paramètre d'impact compris entre b et $b + db$ est

$$dN = n2\pi b db = n\pi db^2 , \quad (5.18)$$

car cela isole un ruban de longueur $2\pi b$ et de largeur db . Les particules recueillies entre Φ et $\Phi + d\Phi$, par ailleurs, couvrent un angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \Phi d\Phi = -2\pi d(\cos \Phi)$. Si on définit la section efficace différentielle $\sigma(\Phi)$ au moyen de

$$dN = n\sigma(\Phi)d\Omega , \quad (5.19)$$

ce qui montre que la dimension de σ est $[\sigma] = m^2$, l'identification donne

$$\sigma(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{db^2}{d \cos \Phi} . \quad (5.20)$$

Dans le cas d'une sphère dure, on a $\sin(\Phi/2) = b/R$, donc $\cos(\Phi) = 1 - 2b^2/R^2$, et on trouve σ indépendant de Φ . Si on excepte la direction $\Phi = 0$, où l'on recueille les particules ayant manqué leur cible, les particules diffusées sont réparties isotropiquement.

5.9 Stabilité des orbites

Sauter en première lecture.

Prenons l'exemple d'une force attractive près de $r = a$. Avec une position et une vitesse initiales appropriées, on peut obtenir une trajectoire circulaire de rayon $r = a$. Le problème est de savoir si la trajectoire restera au voisinage de ce cercle si on communique au point matériel des conditions initiales très légèrement différentes, ou si, au cours de son mouvement, il est légèrement déplacé ou dévié par une perturbation extérieure. À titre d'exercice, on peut chercher une condition sur la fonction de force $f(r)$ ou l'énergie potentielle associée $E_P(r)$ pour que ça se réalise.

5.10 Problème inverse

Sauter en première lecture.

Il s'agit non plus de trouver la trajectoire et la loi horaire connaissant la force, mais de dire quelle peut bien être la loi de force qui correspond à certaines observations.

On peut, par exemple, s'attaquer à l'exercice (difficile) suivant : imaginons une trajectoire circulaire de rayon R , de centre géométrique Ω . Existe-t-il une loi de force centrale isotrope, mais issue d'un point intérieur O au cercle, à distance $O\Omega = a$, avec $a < R$, telle que la trajectoire soit le cercle (C) avec des conditions initiales adéquates ?

Ou bien, après avoir accumulé des données sur la diffusion, peut-on reconstruire l'énergie potentielle centrale $E_P(r)$ qui en est responsable.

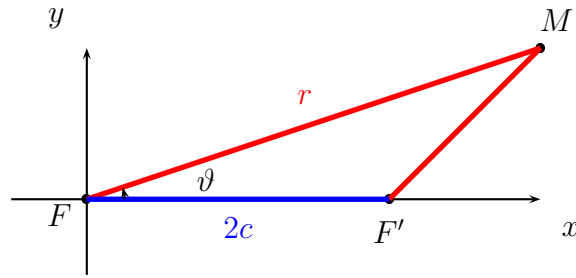
Chapitre 6

Mouvement keplerien à centre fixe

6.1 Quelques rappels sur les coniques

6.1.1 Ellipse

La définition la plus connue est celle du jardinier : étant donnés deux foyers F et F' , séparés de $2c$, l'ellipse est, dans un plan passant par F et F' le lieu des points tels que $MF + MF' = 2a$, où $a > c$ (Si $a = c$, on se réduit au segment FF').

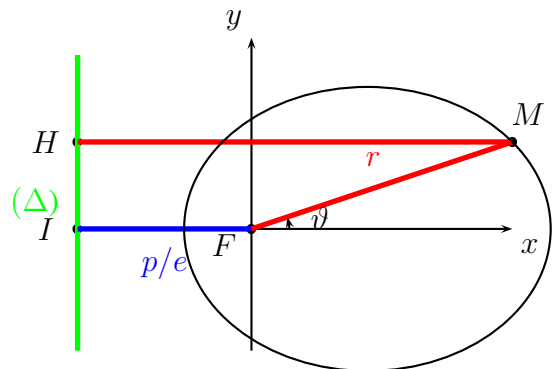


On en tire l'équation polaire. Dans le triangle $MF'F$, $MF'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc \cos(\vartheta)$, et par ailleurs $MF'^2 = (2a - r)^2$, d'où

$$r(\vartheta) = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \vartheta} = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}, \quad (6.1)$$

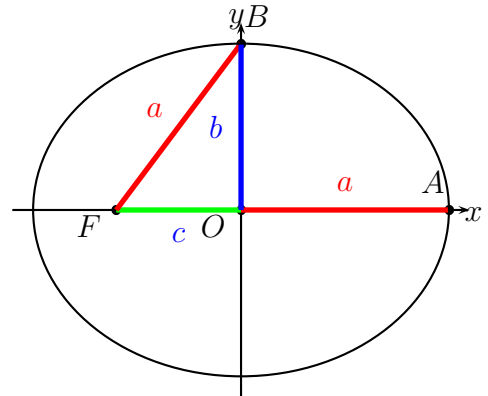
si l'on fait les identifications $b^2 = a^2 - c^2$ (b est le demi petit axe), $p = b^2/a$ (p est le paramètre) et $e = c/a$ (e est l'excentricité).

Il y a aussi une définition par foyer et directrice, qui peut servir dans certains problèmes de familles de trajectoires en balistique spatiale, mais qu'on pourra négliger en première lecture. La directrice est à une distance p/e du foyer F . L'ellipse est le lieu des points dont la distance MF au foyer et la distance MH à la directrice satisfont $MF = e MH$, où $0 \leq e < 1$. Le cas limite $e \rightarrow 0$ renvoie au cercle.



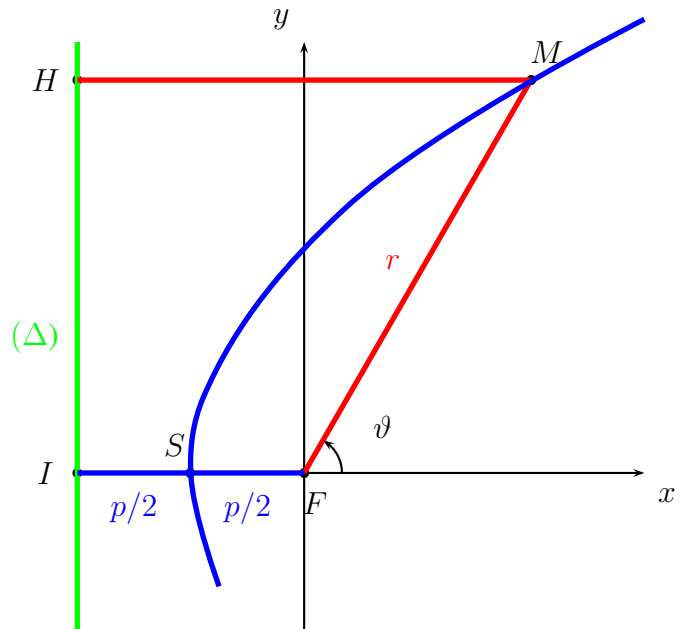
Comme $MF = r$ et $MH = r \cos \vartheta + p/e$, on retrouve bien l'équation polaire $r = p/(1 - e \cos \vartheta)$.

La relation $a^2 = b^2 + c^2$ se retrouve dans le triangle OFB .



6.1.2 Parabole

La parabole correspond à la limite $e \rightarrow 1$. Elle comprend les points équidistants du foyer F et de la directrice (Δ) , laquelle est à une distance p de F .



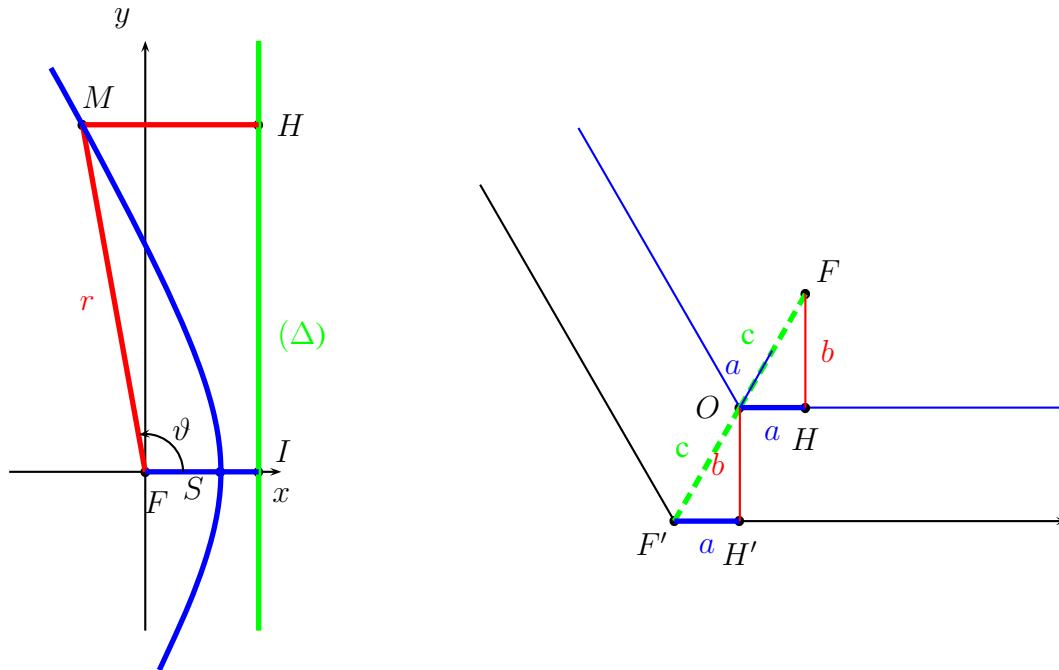
6.1.3 Hyperbole

La branche d'hyperbole entourant le foyer F est le lieu des points telle que la différence de distances $MF' - MF = 2a$. La distance a du centre au sommet A est inférieure à la distance $OF = OF' = c$ du centre à l'un des foyers. L'excentricité $e = c/a > 1$. La définition par foyer et directrice est toujours $MF = eMH$.

La relation $c^2 = a^2 + b^2$ se retrouve avec la distance b du foyer à l'asymptote. Voir figure. Le foyer F' est le centre de force en cas de répulsion. Le foyer F intérieur est le centre de force en cas d'attraction.

6.2 Historique : lois de Kepler

Les observations sur les planètes ont abouti aux lois formulées par Kepler, dont l'interprétation est à la base de la mécanique classique et de la loi de la gravitation.



Les lois de Kepler, en effet, peuvent se démontrer à partir de la loi de Newton et de l’hypothèse d’une force d’attraction centrale $\propto mm'/r^2$. On peut aussi étudier le mouvement de diffusion et vérifier les observations faites sur les comètes, astéroïdes, etc.

Le même formalisme s’applique, à une échelle, pour un électron ou un positon subissant le champ coulombien d’un noyau statique de charge Ze , où il subit une force $\pm Ze^2\mathbf{u}_r/(4\pi\epsilon_0r^2)$. En particulier, on peut élaborer un modèle classique de l’atome d’hydrogène ou de la diffusion Rutherford.

Les lois de Kepler sont :

1. Les orbites des planètes sont de ellipses dont le Soleil est un foyer.
2. Le rayon vecteur issu du Soleil balaie des aires égales pendant des temps égaux.
3. Les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes.

6.3 Démonstration des lois de Kepler

La deuxième loi est une propriété générale de toutes les forces centrales.

La troisième loi peut d’abord se démontrer dans le cas particulier d’une orbite circulaire de rayon R . On peut combiner la loi de Newton et la relation entre vitesse et période

$$\left. \begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= \frac{GMm}{R^2}, \\ v &= \frac{2\pi R}{T}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (6.2)$$

La masse de la planète disparaît tout de suite. À cause du principe de l’équivalence, la masse inerte m de la loi de Newton se simplifie avec la masse gravitationnelle de la loi de force. Si

on admet – provisoirement – la première loi, on peut établir l'expression de la troisième loi. Pour cela, on considère les aphélie et périhélie, où la vitesse est orthoradiale, de valeur C/r , où C est constante des aires. En ces points le bilan d'énergie se simplifie en

$$\frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E, \quad Er^2 + GMmr - mC^2/2 = 0, \quad (6.3)$$

dont les solutions sont la distance minimale $a - c$ et la distance maximale $a + c$. Par identification de la somme et du produit, on obtient

$$a = \frac{GMm}{2E}, \quad b^2 = -\frac{mC^2}{E}, \quad (6.4)$$

(se souvenir que $E < 0$ pour ces orbites elliptiques). En éliminant E et en remplaçant la constante C par le rapport entre le double de la surface πab à la période T , on obtient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (6.5)$$

Il reste à démontrer que les orbites à distance finies sont des coniques de foyer O . Une possibilité est d'exploiter la première formule de Binet. Si $u = 1/r$ et Ku est l'énergie potentielle ($K = -GMm$ pour la gravitation),

$$\frac{1}{2}mC^2(u^2 + u'^2) + Ku = E, \quad u'^2 + \left(u + \frac{K}{mC^2}\right)^2 = \frac{2E}{mC^2} + \frac{K^2}{m^2C^4}, \quad (6.6)$$

très analogue au $\dot{x}^2 + \omega x^2 = \omega^2 a^2$ d'un ressort dont la loi horaire est $x = a \cos(\omega t)$ avec une origine des temps appropriée. Ici, on trouve de même avec une origine appropriée des angles

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{K}{mC^2} + \sqrt{\frac{2E}{mC^2} + \frac{K^2}{m^2C^4}} \cos \vartheta, \quad (6.7)$$

où l'on reconnaît l'équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine. Si $E > 0$, u peut s'annuler et on a une hyperbole. Si $E < 0$ (ce qui nécessite $K < 0$), u ne s'annule pas et on a une ellipse.

6.4 Vecteur de Lenz

À sauter en première lecture.

Il s'agit d'une méthode particulièrement élégante pour trouver l'équation des trajectoires. On considère le vecteur dit de Lenz, ou de Runge–Lenz, voire de Laplace

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \frac{K\mathbf{r}}{r}, \quad (6.8)$$

pour une particule de masse m , de position \mathbf{r} , de vitesse \mathbf{v} , et subissant une force centrale $K\mathbf{r}/r^3$ qui est m fois la dérivée de \mathbf{v} . Le moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ est conservé, et indique la normale et le sens positif de rotation pour le plan du mouvement.

Un petit calcul (qui implique le double produit vectoriel $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^1$, montre que $d\mathbf{A}/dt = 0$. Ce vecteur \mathbf{A} est constant et appartient au plan du mouvement. Si on le prend pour définir l'axe de référence des angles, et qu'on calcule de deux façons $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, d'une part comme valant $Ar \cos \vartheta$, d'autre part en revenant à la définition de \mathbf{A} et avec, de nouveau, un petit calcul, on obtient $L^2/m + Kr = mC^2 + Kr$, et au total

$$r = \frac{-mC^2}{K - A \cos \vartheta} = \frac{-mC^2/K}{1 - A/K \cos \vartheta}, \tag{6.9}$$

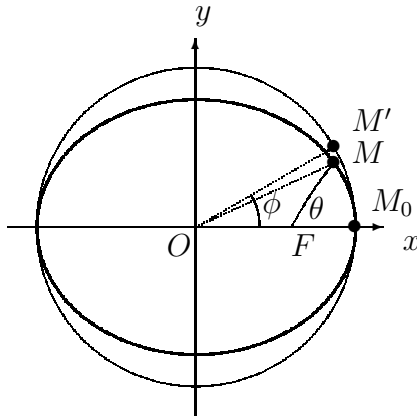
On voit que $e \propto A$, c'est pourquoi on parle parfois de \mathbf{A} comme du vecteur excentricité. Si $K < 0$ comme dans le cas gravitationnel, \mathbf{A} point vers le périhélie.

6.5 Loi horaire

Voir exercice en TD.

Soit θ l'angle de la Terre par rapport au grand axe de son orbite elliptique. Quelle est la fraction de temps t/T écoulée, sachant que $t = T$ pour $\theta = 2\pi$? Si l'orbite était circulaire, on aurait tout simplement $t/T = \theta/(2\pi)$. Avec une orbite elliptique, c'est un peu plus compliqué.

Le détail des calculs sera proposé en TD. Les étapes essentielles sont :



La loi des aires stipule que chaque planète M tourne autour du soleil F de telle façon que le rayon vecteur FM balaie toujours la même surface par unité de temps. La loi horaire est donc

$$\frac{t}{T} = \frac{[FM_0M]}{S},$$

où T est la période, $S = \pi ab$ la surface totale et $[FM_0M]$ l'aire balayée entre M_0 et M . D'où l'intérêt de calculer $[FM_0M]$ en fonction de l'angle θ qui apparaît dans l'équation polaire $r = p/(1 - e \cos \theta)$.

L'ellipse se déduit par affinité $M' \rightarrow M$ du cercle de centre O et de rayon a . Donc $[OM_0M] = ab\phi/2$. En retranchant le triangle adéquat, on obtient

$$[FM_0M] = \frac{1}{2}(ab\phi - cb \sin \phi). \tag{6.10}$$

Reste à établir la relation entre θ et ϕ . Par identification des coordonnées,

$$b \sin \phi = \frac{p \sin \theta}{1 - e \cos \theta}, \quad a \cos \phi = c + \frac{p \cos \theta}{1 - e \cos \theta}.$$

¹La formule générale est $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}$

Les gens soucieux d'esthétique pourront arranger la dernière relation en

$$\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi} = \frac{a - c}{a + c} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta},$$

$$\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{a - c}{a + c}} \tan \frac{\theta}{2},$$
(6.11)

où apparaît le rapport $(a - c)/(a + c)$ du périhélie à l'aphélie.

Si on combine toutes ces relations, on obtient t en fonction de θ ,

$$\frac{2\pi t}{T} = 2 \operatorname{Arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan(\theta/2) \right] - \frac{e\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta},$$
(6.12)

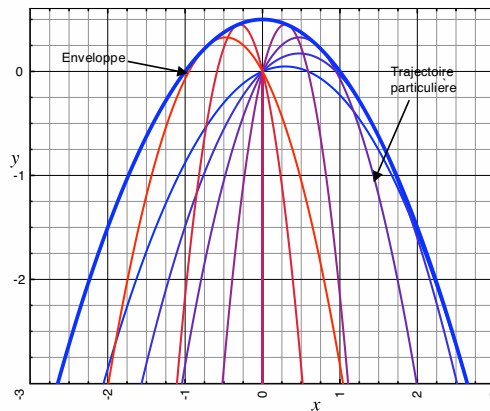
qui ne peut s'inverser analytiquement, mais sous forme de développement en série

$$\theta = \frac{2\pi t}{T} + 2e \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{5e^2}{4} \sin \frac{4\pi t}{T} + \frac{e^3}{12} \left(13 \sin \frac{6\pi t}{T} - 3 \sin \frac{2\pi t}{T} \right) + \dots$$
(6.13)

6.6 Balistique spatiale

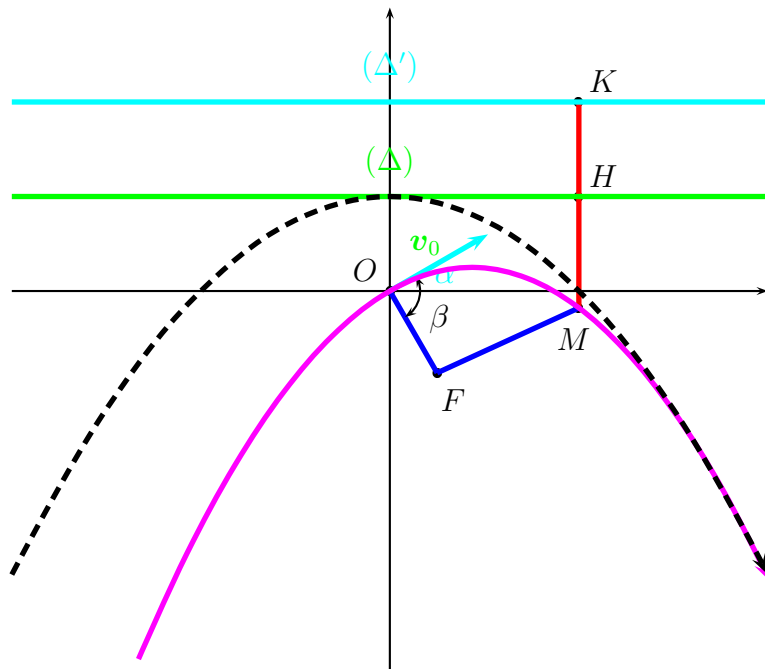
Voir exercice en TD.

Il s'agit de généraliser aux orbites spatiales le problème de la parabole de sûreté. Si on envoie d'un point O des projectiles avec une vitesse v_0 de module donné et d'orientation variable, on obtient une famille de trajectoires paraboliques dont l'enveloppe est une parabole, dite «parabole de sûreté» (qui n'est pas l'ensemble des sommets des paraboles individuelles). Il y a évidemment une symétrie par rapport à la verticale du point de lancement, et dans l'espace, on aurait un parabolôïde.

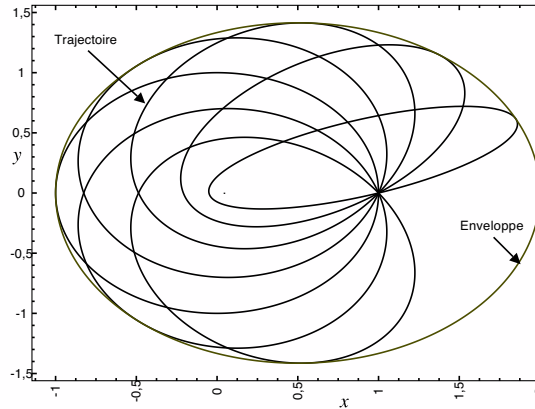


On pourra sauter, même en deuxième ou troisième lecture, la petite digression géométrique qui suit.

Ces paraboles balistiques, quand α varie, ont une directrice commune, (Δ) , la droite $y = 1/2$, dans l'unité de longueur naturelle du problème, qui est v_0^2/g . Le foyer, de coordonnées $x_F = -\sin(2\alpha)$ et $y_F = \cos(2\alpha)$, décrit un cercle de rayon $1/2$, où son angle polaire est $2\alpha - \pi/2$. On vérifie en effet que la condition $MF = MH$, soit $(y - 1/2)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$ redonne bien l'équation de la parabole. On a $MO \leq MF + FO = MH + FO = MK$, ce qui caractérise bien l'intérieur d'une parabole de foyer O et de directrice (Δ') , la droite $y = 1$. On voit que la trajectoire touche la parabole de sûreté au point M tel que O, F et M sont alignés, ce qui signifie avec une inclinaison $\beta = \pi/2 - 2\alpha$.

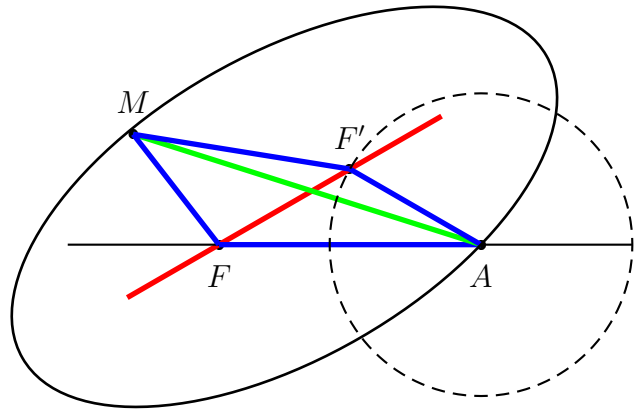


De même, si on envoie des satellites toujours du même point A , avec des vitesses de même module, mais d'orientation variable, on obtient une famille de trajectoires elliptiques, et on peut montrer que leur enveloppe est une ellipse, dont les foyers sont le centre de la Terre et le point de lancement.

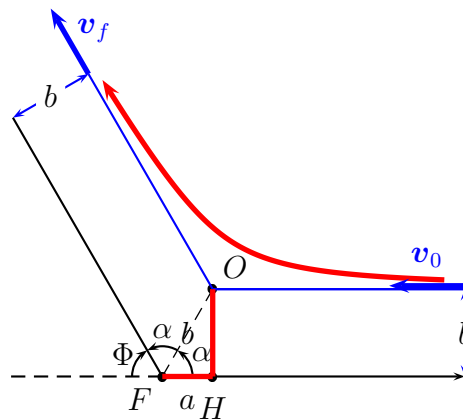


Les amateurs de géométrie à l'ancienne pourront faire le raisonnement suivant. L'énergie de tous ces satellites est la même, seul change leur moment cinétique. Donc, si F' est le deuxième foyer de la trajectoire, on a $MF + MF' = 2a$, où a est constant. Ce qui vaut pour le point de départ A , et si r_0 est sa distance à F , on a $AF' = 2a - r_0$: le deuxième foyer décrit un cercle de centre A et de rayon $2a - r_0$.

Pour un point quelconque de l'une de ces ellipses, on a $MF + MA \leq MF + MF' + F'A = 4a - r_0$, ce qui démontre bien que M est intérieur à une ellipse de foyers F et A et de grand axe $4a - r_0$.



6.7 Diffusion coulombienne



Pour la démonstration de (5.15), une des nombreuses possibilités est la suivante. On se place dans le cas répulsif de la figure ci-dessus. Les paramètres habituels de l'hyperbole sont a , distance du centre O au sommet de l'hyperbole, qu'on retrouve en FH ; b , le paramètre d'impact; c la distance focale.

Dans le triangle OFH , on a $\tan \alpha = 1/\tan(\Phi/2) = b/a$. Par ailleurs, l'énergie mécanique, qui est $E = -K/(2a)$ pour une ellipse dans le potentiel attractif $-K/r$, est $E = +K/(2a)$ pour une hyperbole soumise à la répulsion K/r et vaut par ailleurs $mv_0^2/2$. D'où $a = K/(mv_0^2)$ et la formule de Rutherford

$$\tan \left[\frac{\Phi}{2} \right] = \frac{K}{mv_0^2 b}. \quad (6.14)$$

On peut aussi intégrer l'équation de Binet $u'' + k = -K/(mC^2)$ avec $C = v_0 b$, et obtenir l'équation polaire de la trajectoire.

$$u(\vartheta) = -\frac{K}{mv_0^2 b^2} (1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{b} \sin \vartheta. \quad (6.15)$$

La distance est infinie ($u = 0$) pour $\vartheta = 0$ et une autre valeur telle que

$$\cot(\vartheta/2) = K/(mv_0^2 b). \quad (6.16)$$

On pourra sauter ce qui suit en première lecture.

La figure ci-dessous montre une série de trajectoires hyperboliques de diffusion dans le cas répulsif, $K > 0$. Les unités sont choisies de façon que $K/mv_0^2 = 1$. On fait varier le paramètre d'impact b .

L'équation d'une trajectoire est (6.15).

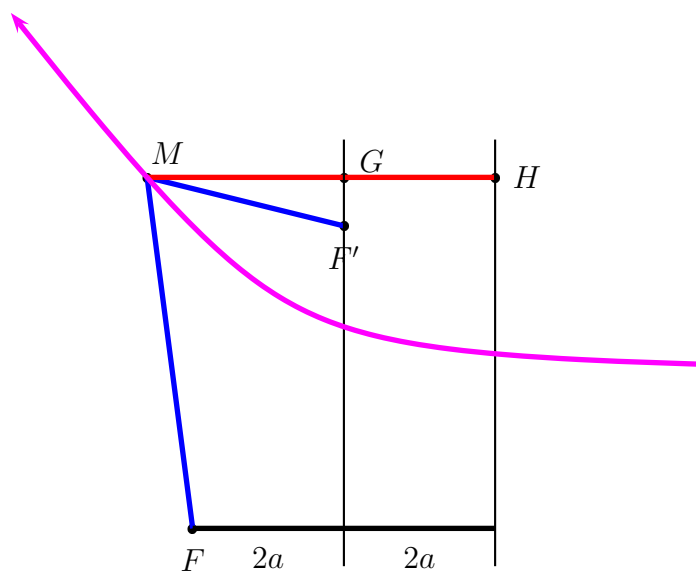
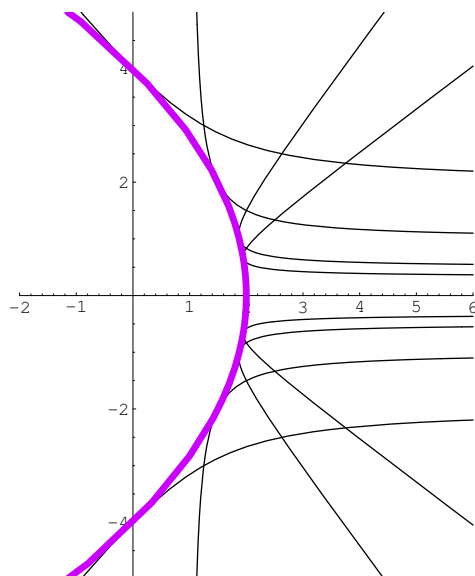
On voit bien qu'à cause de la répulsion, on ne peut s'approcher trop près de la cible. Il y a une zone interdite, pour une vitesse de module v_0 donné, qui a bien-ûr une symétrie de révolution. On peut montrer que dans un plan de coupe comme celui de la figure, la limite est la parabole

$$u(\vartheta) = \frac{mv_0^2}{4K} (1 + \cos \vartheta). \quad (6.17)$$

L'idée est de considérer (6.15) comme une équation en b ou b^{-1} . Si elle n'a pas de solution, le point (u, ϑ) ne peut être atteint.

On pourra sauter la fin même en deuxième lecture.

On pourrait retrouver cette courbe de sûreté par des considérations géométriques. Ces hyperboles ont même foyer F et même axe a . Le deuxième foyer, F' , décrit la droite $x = 2a$, à une ordonnée $2b$. Si on considère la droite $x = 4a$, et si un point M d'une trajectoire s'y projette en H , on a $MH \leq MF' + 2a = MF$, car $MF - MF' = 2a$ sur cette branche d'hyperbole. La relation $MH \leq MF$ signe l'extérieur d'une parabole.



Chapitre 7

Mouvement Keplerien à deux corps

On utilise ici les notations gravitationnelles, mais les résultats sont évidemment valables, *mutatis mutandis*, pour les charges en interaction. On ne suppose plus qu'une des masses est beaucoup plus lourde que l'autre. Si le système est isolé, la seule force est l'attraction mutuelle Gm_1m_2/r^2 .

L'aspect qualitatif peut se déduire de considérations d'énergie, mais il faut faire attention. Un système peut avoir une énergie mécanique

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (7.1)$$

positive et ne jamais se dissocier !

Il faut éliminer l'énergie (positive) du mouvement global, ou, de façon équivalent, se placer dans le référentiel barycentrique. C'est l'énergie cinétique associée au mouvement relatif, ou l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse qui doit être combinée à l'énergie potentielle pour construire l'énergie mécanique intrinsèque, dont le signe indique la nature du mouvement,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Si $\mathcal{E} < 0$, l'extrémité du vecteur séparation décrit une ellipse : les deux masses restent à distance finie l'une de l'autre. Si $\mathcal{E} > 0$, c'est une hyperbole, ce qui signifie que les deux masses se séparent infiniment.

On connaît $\mathbf{r}_G = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$, qui décrit un mouvement rectiligne uniforme, ainsi que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, et donc la trajectoire et la loi horaire de chacun des deux astres.

En particulier, la loi fondamentale pour l'évolution de la séparation est

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{r^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.3)$$

où l'on voit, en remplaçant μ par sa valeur, que le coefficient GM du problème à centre fixe, est remplacé par $G(m_1 + m_2)$. Tous les résultats obtenus pour la *position* r du problème à centre fixe se transposent pour la *séparation* r du problème à deux corps, avec la substitution $GM \rightarrow G(m_1 + m_2)$.

En particulier, l'expression la plus générale de la troisième loi de Kepler pour un système binaire est

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3, \quad (7.4)$$

Ainsi, en observant les étoiles doubles, on peut déterminer la somme des deux masses, par comparaison de leur période de rotation l'une autour de l'autre avec la période des planètes.

Chapitre 8

Problème de Kepler à trois corps

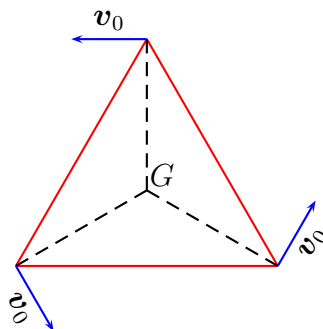
C'est un problème redoutable qu'on ne sait résoudre que dans certains cas particuliers. Par exemple, si l'un des masses est très inférieure aux deux autres, soit $m_3 \ll m_1$ et $m_3 \ll m_2$, on peut résoudre le problème du système $\{1, 2\}$, qui n'est pratiquement pas influencé par la troisième masse. Puis on intègre numériquement les équation du mouvement pour la masse 3, qui évolue sous l'influence gravitationnelle de deux sources mobiles mais désormais parfaitement connues.

8.1 Configurations de Lagrange

Lagrange a établi quelques cas particuliers solubles.

8.1.1 Rotation symétrique

Considérons par exemple trois masses identiques m aux sommets d'un triangle équilatéral et animées d'une vitesse *orthoradiale* correspondant à un même sens de rotation et à un même module v_0 .



Dans cette configuration, chaque masse subit une force résultante dirigée vers le centre G et d'intensité $Gm^2\sqrt{3}/A^2$, où A est le coté du triangle équilatéral, soit $Gm^2/(r^2\sqrt{3})$, où r est la distance de G à chacune des masses, c'est-à-dire le rayon du cercle circonscrit. On aura un mouvement circulaire pour chacune des masses, avec maintien de leurs positions relatives, si cette force est égale à mv_0^2/r , ce qui permet de déterminer v_0 .

8.1.2 Dilatation symétrique

Si on part de positions symétriques, en triangle équilatéral, mais avec des vitesses radiales (dont le support passe par G) de même mesure algébrique, les particules s'éloignent ou se rapprochent symétriquement, et on peut calculer facilement que l'équation d'évolution est du type

$$\ddot{r} = -K/r^2, \quad (8.1)$$

tout à fait semblable à l'équation $\ddot{r} = -GM/r^2$ pour une particule attirée par un centre fixe. On calculera K à titre d'exercice, en projetant et en ajoutant les attractions des deux autres masses, et en utilisant la relation entre la distance r au centre de masse et le côté A du triangle.

8.1.3 Généralisation à des masses différentes

À titre d'exercice, on pourra généraliser à des masses différentes m_1 , m_2 et m_3 aux sommets de ce même triangle équilatéral. On trouve que les configurations équilatérales, associées à des vitesses initiales bien choisies, correspondent à un «équilibre», dans le sens où les positions ne bougent pas dans le repère en rotation.

Moyennant certaines conditions sur les rapports de masse, on peut montrer qu'il s'agit d'un équilibre stable, c'est-à-dire que si l'une des masses s'écarte un peu de la position et de la vitesse idéales, elle reste au voisinage du sommet, avec de petites oscillations. C'est le cas des planètes «joviennes» qui forment un triangle équilatéral avec le Soleil et Jupiter.

8.1.4 Le problème restreint à trois corps

C'est le cas où deux des corps sont beaucoup plus massifs que le troisième. On calcule d'abord le mouvement de ces deux astres sans tenir compte du troisième, puis on évalue le mouvement du troisième sous l'influence de deux sources en mouvement connu.

8.2 Envoyer une sonde hors du système solaire

C'est un problème délicat, et on trouve des solutions fausses dans certains livres. La question est : quelle vitesse minimale doit-on communiquer à une fusée, lancée à une distance r du centre de la Terre, pour qu'elle s'échappe du système Solaire ?

8.2.1 Première solution

Soient M , m et μ les masses du Soleil, de la Terre et du satellite. L'énergie mécanique du satellite, positive à l'infini car purement cinétique, doit être également positive au départ. Si R dénote la distance de la sonde au Soleil (R est peu différent de la distance entre le Soleil et la Terre), r sa distance à la Terre, et v_0 sa vitesse initiale, on doit avoir

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{GM\mu}{R} - \frac{Gm\mu}{r} > 0. \quad (8.2)$$

8.2.2 Que penser de cette première solution ?

Zéro pointé ! On sait bien que pour lancer un satellite, on profite de l'effet d'entraînement de la Terre. Voir par exemple le livre de Werner von Braun, le père des premières fusées américaines, et aussi, hélas, des V1 et V2 envoyés par les nazis vers l'Angleterre !

L'énergie du satellite n'est absolument pas conservée. Quand on lance le satellite, une partie de l'énergie profite à la Terre ! Sauf si on se place dans le référentiel lié à la Terre, auquel cas, l'énergie prise par la Terre n'est que le rapport μ/m de celle du satellite et est donc négligeable.

8.2.3 Deuxième solution

Faute d'une solution exacte, on va exploiter la hiérarchie $\mu \ll m \ll M$ des masses et $r \ll R$ (au début) des distances, séparer des phases successives et traiter chaque phase dans un référentiel approprié.

Le satellite échappe à la Terre

On le lance à une distance r du centre de la Terre (supérieure au rayon terrestre). On se place dans un référentiel Galiléen qui coïncide quelques heures avec le référentiel terrestre. La distance du satellite au Soleil varie peu, donc l'énergie de gravitation apportée par le Soleil varie peu et elle disparaît du bilan. À l'inverse, la distance entre la Terre et le satellite varie beaucoup, de r à pratiquement l'infini à l'échelle terrestre. Au bout de cette phase de lancement, le satellite acquiert *par rapport à la Terre* une vitesse v_1 donnée par

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{Gm\mu}{r} . \quad (8.3)$$

Le satellite combine sa vitesse avec celle de la Terre

Plaçons-nous dans le repère lié au Soleil, qui est galiléen à une très bonne approximation. La Terre tourne en orbite circulaire de rayon R_T , avec une vitesse V_T telle que $V_T^2 = GM/R_T$ (par simple application de la loi de Newton). On a lancé le satellite de telle façon qu'après avoir «échappé» à l'attraction terrestre, sa vitesse v_1 se trouve parallèle à la vitesse de la Terre par rapport au Soleil.

Dans le repère du Soleil, la vitesse du satellite est donc

$$v_2 = v_1 + V_T . \quad (8.4)$$

Le satellite échappe au Soleil

Cette vitesse v_2 doit être supérieure à la vitesse de libération à distance R_T du soleil, laquelle est $\sqrt{2}V_T$ (on le trouve par un simple bilan d'énergie).

Bilan

$$v_0^2 - \frac{2Gm}{r} \geq (\sqrt{2} - 1)^2 \frac{GM}{R_T}, \quad (8.5)$$

Chapitre 9

Le rôle des conditions initiales

9.1 Introduction

Après avoir étudié quelques mouvements, il est intéressant de récapituler en les observants du point de vue de leur sensibilité aux conditions initiales (CI). De très grandes différences apparaissent en effet :

- Pour un système *linéaire* amorti soumis à une excitation extérieure $F(t)$, sinusoïdale ou autre, le système évolue inexorablement vers une solution universelle, qui dépend bien-sûr de $F(t)$ mais ne dépend pas des conditions initiales. Celles-ci sont gommées de la mémoire, au bout d'un certain temps.
- Pour une particule dans un potentiel harmonique, une petite modification des conditions initiales donne une ellipse très proche, qui sera parcourue avec la même période. L'écart infinitésimal au départ reste infinitésimal.
- Pour une particule dans un champ coulombien ou keplérien, deux particules avec des CI un peu différentes restent au début très proches. Un cas particulier est celui de trajectoires elliptiques de même énergie (les vitesses initiales ont même module, et on part à même distance du centre, par exemple) : la période est identique, et les particules restent proches. En général, les particules s'éloignent progressivement. Ainsi, dans une expérience de diffusion, des paramètres d'impact différents donnent des angles de déviation différents. Sur leurs asymptotes inclinées différemment, les particules ont une séparation qui croît linéairement.
- Pour un système *non linéaire* excité extérieurement, il arrive que l'évolution à long terme dépende de façon très sensible des conditions initiales, même si le système est amorti. On parle de chaos ou de chaos déterministe. En effet, pour des CI données, la loi horaire et la trajectoire sont toujours les mêmes, mais on observe parfois des changements importants du comportement qualitatif pour des modifications infimes des CI

Cet aspect de la mécanique n'est pas vraiment nouveau. En particulier, Poincaré a fait des contributions décisives pour la classification des comportements. Mais il a reçu récemment l'apport de nouveaux développements. Et surtout, on a réalisé l'importance des applications.

Par exemple, pourquoi ne peut-on faire des prévisions météorologiques à long terme, même si on dispose d'ordinateurs de plus en plus puissants ? Le système dynamique est essentiellement chaotique. Une petite correction sur la force des vents, une petite erreur sur un relevé de température, le choix d'une grille plus fine pour le balayage géographique, et les prévisions à long terme seront complètement chamboulées. On dit parfois qu'un battement d'aile de papillon quelque part en Amérique du Sud pourrait entraîner l'apparition d'un orage quelques semaines plus tard en Europe.

Nous allons reprendre les exemples ci-dessus l'un après l'autre. On pourra examiner d'autres cas connus (balistique dans un champ gravitationnel uniforme, particule chargée dans un champ magnétique, etc.) pour voir quelle est leur sensibilité aux conditions initiales.

9.2 Système linéaire amorti excité extérieurement

Soit

$$\ddot{x} + \dot{x}/q + x = \alpha \cos(\omega t), \quad (9.1)$$

l'équation d'un tel système. On part d'un bilan de force

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + A \cos(\Omega t), \quad (9.2)$$

divise par m et modifie l'unité de temps (transformation $t \rightarrow \beta t$, voir plus loin dans le cas non linéaire pour plus de détails) de telle façon que la pulsation de référence $(k/m)^{1/2}$ soit égale à 1 dans les nouvelles unités. On a donc trois paramètres, q , g et ω , sans perte de généralité.

La solution est connue et sera révisée dans le module «Ondes et Vibrations». Il y a une solution sinusoïdale $X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, où $A > 0$ et ϕ (modulo 2π) sont parfaitement déterminés. La solution la plus générale est

$$x(t) = X(t) + a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (9.3)$$

où λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 + \lambda/q + 1 = 0$. Peu importe ici que les racines soient réelles ou complexes conjuguées, ce qui compte, c'est que $\Re \lambda_i < 0$, et donc

$$x(t) \rightarrow X(t) \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty, \quad (9.4)$$

d'où la propriété énoncée que les conditions initiales sont complètement gommées après un certain temps. La fiabilité, la reproductibilité des dispositifs mécaniques ou électriques repose sur cette propriété essentielle.

9.3 Mouvement harmonique

Voir section 5.7. La stabilité par rapport aux CI est exceptionnelle. Si on déplace un peu le point de lancement, si on change un peu la vitesse initiale, le système évolue sur une ellipse voisine, avec *la même fréquence*. Le point restera donc à distance infinitésimale de la position qui avait été prévue.

9.4 Mouvement dans un champ coulombien

Voir chapitre 6. Si on lance un satellite en se trompant un peu sur la direction de la vitesse initiale, on obtient une ellipse un peu différente, mais décrite avec la même période, et le mobile reste à distance infinitésimale de la position prévue.

Par contre, si on se trompe un peu sur la position du point de départ ou sur le module de la vitesse de lancement, le mobile évolue sur une ellipse certes voisine, mais avec une période un peu différente, et à la longue l'écart par rapport à la position théorique pourra atteindre jusqu'au grand axe de l'ellipse.

Dans une trajectoire de diffusion, une erreur modifie l'angle de déviation, et l'écart augmentera linéairement avec le temps.

9.5 Pendule amorti excité extérieurement

On sait que pour un pendule simple, l'équation (9.1) n'est valable que pour les petites valeurs de l'angle x lorsque $\sin x \simeq x$. Voir Sec. 4.3.

Que se passe-t-il si l'excitation extérieure entraîne le système dans une région où cette approximation n'est plus valable ?

L'équation du pendule avec frottement, si x dénote l'angle du pendule, est

$$m\ell^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + mg\ell \sin x = A \cos(\Omega t), \quad (9.5)$$

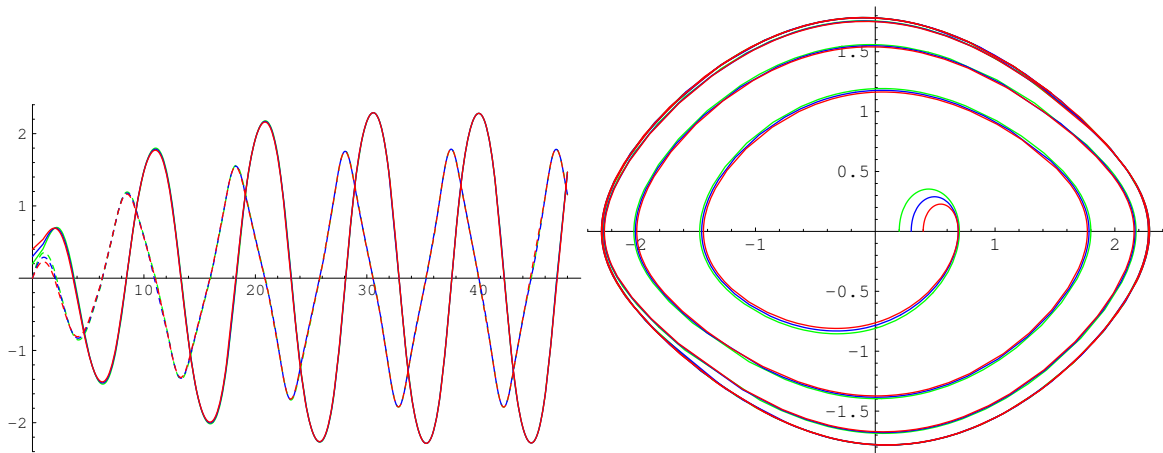
avec une excitation extérieure de pulsation Ω . On pose $t = \sqrt{\ell/g} \tau$, soit un changement de l'unité de temps, ce qui donne

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\lambda}{mg^{1/2}\ell^{3/2}} \frac{dx}{d\tau} + \sin x = \frac{A\ell}{g} \cos(\Omega \sqrt{\ell/g} \tau), \quad (9.6)$$

que l'on peut donc écrire sans perte de généralité comme

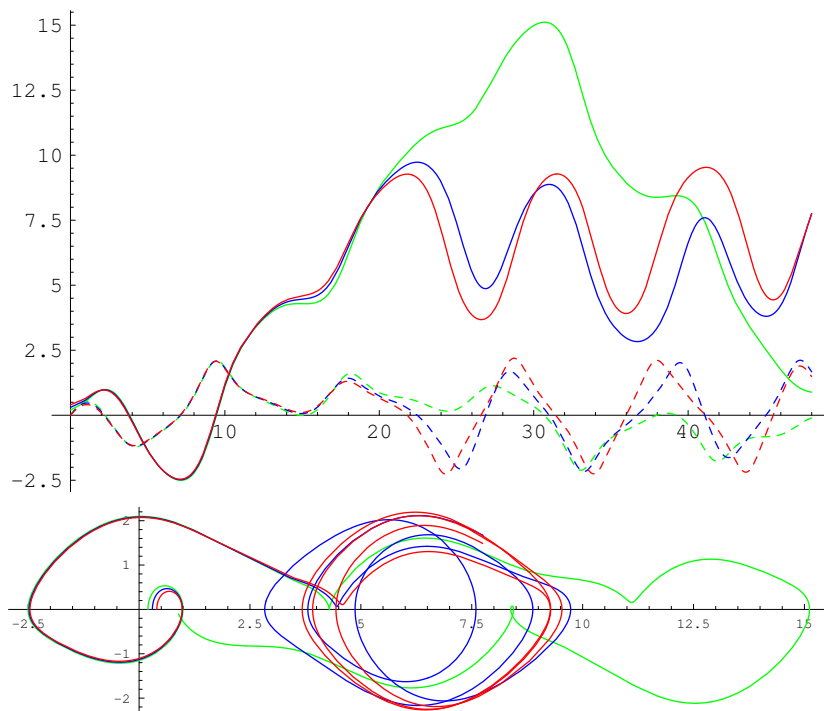
$$\ddot{x} + \dot{x}/q + \sin x = \alpha \cos(\omega t), \quad (9.7)$$

Prenons par exemple $q = 2$. Pour des valeurs faibles de α , par exemple $\alpha = 0.8$ sur la figure, on observe le même comportement que pour un oscillateur linéaire. Pour des CI légèrement différentes, les solutions convergent vers une solution universelle.



La deuxième figure, à droite, est une représentation souvent utilisée dans ce domaine : la position est en abscisse et la vitesse en ordonnée.

Si on augmente un peu α , le comportement change. Pour $\alpha = 1.09$, on obtient les figures ci-dessous. Des solutions qui diffèrent peu au départ se mettent à s'écarter de plus en plus, malgré la présence du terme d'amortissement.



Chapitre 10

Notions de mécanique relativiste

10.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons du mouvement des particules dont la vitesse n'est pas négligeable par rapport à la vitesse de la lumière.

Nous ne dirons rien des changements de référentiel en relativité, avec les paradoxes d'espace-temps assez populaires qui sont plus ou moins bien discutés dans l'abondante littérature sur la Relativité.

Nous expliquerons comment la loi de Newton et la conservation de l'énergie doivent être reformulés pour interdire aux particules massives de dépasser la vitesse de la lumière, et comment cette nouvelle dynamique explique le mouvement observé des particules rapides des rayons cosmiques ou des accélérateurs de particules.

10.2 Rappels de mécanique newtonienne

En mécanique classique, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont exprimées au moyen de la masse et de la vitesse par

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (10.1)$$

Masse, quantité de mouvement et énergie cinétique satisfont à

$$K = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (10.2)$$

que l'on peut appeler *relation de dispersion*, caractéristique de chaque particule.

Il existe des référentiels privilégiés, dit *Galiléens*, déduits les uns des autres par des translations uniformes, dans lesquels les lois de la dynamique sont particulièrement simples. Si une particule n'est soumise à aucune force, sa quantité de mouvement \mathbf{p} est inchangée et l'énergie $K = \mathbf{p}^2/(2m)$ reste constante. C'est le principe de l'inertie. Si une particule est soumise à une force \mathbf{f} pendant un temps dt où elle progresse d'un déplacement $d\mathbf{r}$, sa

quantité de mouvement et son énergie sont modifiées selon la loi de Newton et le théorème de l'énergie cinétique

$$d\mathbf{p} = \mathbf{f} dt, \quad dK = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.3)$$

C'est le fondement de la mécanique du point matériel. Remarquons que comme $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, la compatibilité de ces deux relations requiert $dK = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$, relation qui est une conséquence de (10.1).

10.3 Lois du mouvement en Relativité

10.3.1 Nouvelle définition des grandeurs dynamiques

Une observation cruciale est que la lumière se propage avec une vitesse finie. Cette propriété est connue depuis longtemps (voir chapitre ??). La valeur précise¹ est $c = 299\,792\,458$ m/s.

Dès lors que l'énergie lumineuse est véhiculée à la vitesse c , on peut accepter l'idée que les particules massives ont une vitesse inférieure à c . Cela signifie que les ondes lumineuses, ou les ondes électromagnétiques de manière plus générale, transmettent l'information le plus rapidement. Tout message véhiculé par un support massif met plus de temps à aboutir qu'un signal lumineux.

Or la mécanique classique n'impose pas de plafond aux vitesses, et ne fait jouer à la valeur c de la vitesse aucun rôle privilégié. Si une force constante \mathbf{f} agit suffisamment longtemps sur une particule, elle lui communique une vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{f}t/m$ aussi grande que l'on veut. Il faut donc modifier les lois de la mécanique.

La solution adoptée en Relativité est élégante. La loi de Newton et le théorème de l'énergie cinétique (10.3) sont inchangés. Mais l'expression de la quantité de mouvement \mathbf{p} et de l'énergie cinétique K en fonction de la masse et de la vitesse sont modifiées, de manière à ce que \mathbf{p} et K deviennent infinies quand la vitesse \mathbf{v} s'approche de la vitesse de la lumière c . Si on persiste à agir avec une force \mathbf{f} sur une particule, celle-ci acquerra une quantité de mouvement \mathbf{p} et une énergie K de plus en plus grandes, mais sa vitesse restera inférieure à c .

Il y a bien entendu plusieurs façons de modifier les relations (10.1) de façon que \mathbf{p} et K soient infinis pour $v \rightarrow c$. La définition relativiste de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique est en fait :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{et} \quad K = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right]. \quad (10.4)$$

D'une part ces expressions se transposent de façon cohérente d'un référentiel à l'autre.

D'autre part, on peut soumettre (10.4) à des vérifications expérimentales. En physique des particules élémentaires, on dispose de déflecteurs magnétiques qui mesurent \mathbf{p} , et d'autres détecteurs (certains sont appelés calorimètres par nostalgie de la physique traditionnelle)

¹De nos jours, la vitesse c est fixée exactement à cette valeur de façon à relier la définition de l'unité de longueur à celle de l'unité de temps.

sensibles à l'énergie K . Même si l'on ne mesure pas la vitesse, on peut vérifier que \mathbf{p} et K satisfont la relation de dispersion qui découle de (10.4) et qui remplace le $K = \mathbf{p}^2/(2m)$ de la physique classique

$$(K + mc^2)^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (10.5)$$

Comme l'énergie cinétique apparaît dans le groupement $(K + mc^2)$, on pose

$$W = K + mc^2, \quad (10.6)$$

que l'on appelle *l'énergie de la particule*. Le terme mc^2 est dénommé « énergie de masse » ou « énergie de repos » de la particule.

Le passage de K à W semble un décalage anodin de l'origine des énergies, commode pour simplifier les calculs. Il traduit en fait l'équivalence entre la masse et l'énergie, avec de nombreuses conséquences.

Récapitulons les relations algébriques entre masse, vitesse, quantité de mouvement et énergie. La relation de dispersion

$$W^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (10.7)$$

caractérise une particule de masse m . Si on connaît la vitesse, alors

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{et} \quad W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10.8)$$

Si c'est la quantité de mouvement qui est connue, on peut calculer

$$W = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2/c^2}}. \quad (10.9)$$

La donnée de l'énergie ne suffit pas à déterminer la vitesse ou la quantité de mouvement, mais donne leur module

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{c} \sqrt{W^2 - m^2 c^4}, \quad \text{et} \quad |\mathbf{v}| = c \frac{\sqrt{W^2 - m^2 c^4}}{W}. \quad (10.10)$$

La figure 10.1 représente la quantité de mouvement et l'énergie cinétique en fonction de la vitesse. On voit qu'à vitesse donnée, une particule possède plus de quantité de mouvement et d'énergie cinétique que ne le suggère l'approximation non-relativiste. Bien entendu, on retrouve l'approximation non-relativiste dans le domaine des faibles vitesses, si bien que la mécanique classique apparaît comme une limite de la théorie relativiste. Il faut remarquer que le paramètre de développement est v^2/c^2 , et non pas v/c . Une particule se déplaçant à une vitesse $0,1c$ est justifiable d'un traitement classique, l'erreur n'étant que de l'ordre de 1%. Par contre, quand $v \rightarrow c$, l'approximation classique devient caricaturale.

Prenons un exemple. Dans la première phase d'exploitation, les électrons de l'anneau LEP, au CERN, avaient une énergie cinétique $K = 45 \text{ GeV} = 45 \times 10^9 \text{ eV}$, à comparer par exemple avec l'énergie cinétique moyenne 13,6 eV d'un électron dans l'état fondamental de

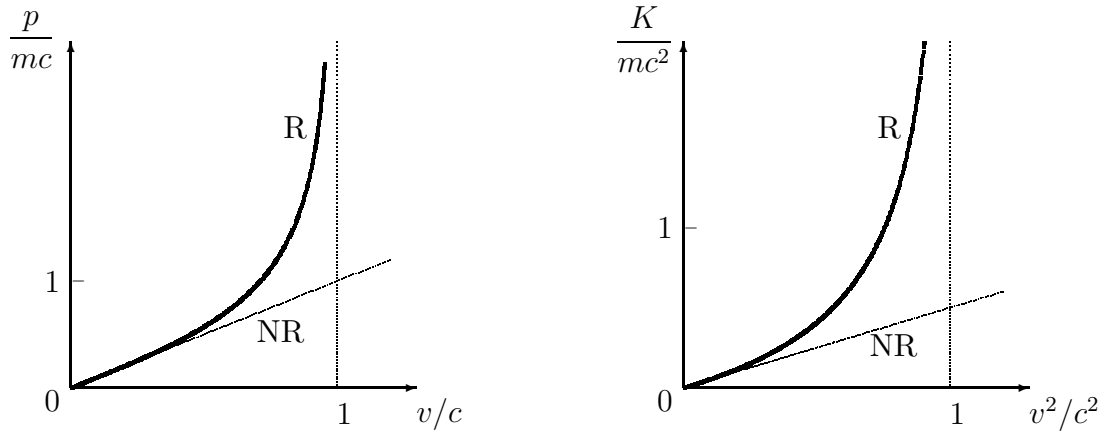


FIG. 10.1 – La quantité de mouvement par unité de masse, p/mc , en fonction de v/c , et l'énergie cinétique par unité de masse, K/mc^2 , en fonction de v^2/c^2 , sont tracées dans le cas non-relativiste (NR) et dans le cas relativiste (R). Pour $v/c \rightarrow 1$, la quantité de mouvement et l'énergie relativistes deviennent infinies.

l'atome d'Hydrogène, et à l'énergie de masse $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$. La vitesse des électrons du LEP est :

$$v_1 = c \frac{\sqrt{(K + mc^2)^2 - m^2c^4}}{K + mc^2} \simeq c \left(1 - \frac{mc^2}{2K}\right) = c(1 - \epsilon_1), \quad (10.11)$$

dans la limite où $K \gg mc^2$. La vitesse ne diffère de c que d'une fraction $\epsilon_1 = 6,4 \times 10^{-11}$. Dans la deuxième phase d'exploitation, l'énergie des électrons et positons est (schématiquement) doublée. La vitesse devient $v_2 = c(1 - \epsilon_2)$, avec $\epsilon_2 = 1,6 \times 10^{-11}$. Autrement dit, le doublement d'énergie n'entraîne pratiquement aucune augmentation de vitesse, alors qu'en mécanique classique, la vitesse aurait été multipliée par $\sqrt{2}$.

On voit apparaître sur cet exemple une autre mesure du caractère relativiste ou non relativiste d'un mouvement. Au lieu de considérer v/c , ou plus précisément v^2/c^2 , on compare l'énergie cinétique K à l'énergie de repos, mc^2 . La limite non relativiste correspond à $K \ll mc^2$, la limite ultra-relativiste des électrons du LEP à $K \gg mc^2$.

10.3.2 Unités

En physique microscopique, on utilise rarement le Joule pour mesurer les énergies. On préfère l'*électron-Volt* (eV), qui est l'énergie fournie à un électron ou une autre particule de charge $\pm e$ subissant une différence de potentiel de 1 V. Sa valeur est $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Par exemple l'énergie de l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'Hydrogène est $-13,6 \text{ eV}$.

En physique nucléaire et physique des hautes énergies, on utilise les multiples keV (10^3 eV), MeV (10^6 eV), GeV (10^9 eV) et TeV (10^{12} eV).

La relation d'Einstein $W = mc^2$ permet d'utiliser l'électron-Volt et ses multiples comme unité de masse. On dit par exemple que la masse de l'électron est $m = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ pour signifier que l'équivalent énergétique est $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

De même, une quantité de mouvement p s'exprime en eV/c , car le produit pc est homogène à une énergie.

L'emploi coordonné de l'eV pour les énergies, de l'eV/ c^2 pour les masses et de l'eV/ c pour les quantités de mouvement est commode pour les calculs relativistes. Par exemple, une particule de masse $m = 4 \text{ GeV}/c^2$ et d'énergie $W = 5 \text{ GeV}$ possède une quantité de mouvement $p = (W^2 - m^2c^4)^{1/2}/c = 3 \text{ GeV}/c$.

10.3.3 Rapidité et autres variables utiles

En géométrie, une équation de cercle $x^2 + y^2 = R^2$ suggère une paramétrisation trigonométrique $x = R \cos \vartheta$, $y = R \sin \vartheta$. De même, la relation de dispersion (1.8) est automatiquement satisfaite si on pose

$$W = mc^2 \operatorname{ch} \varphi, \quad pc = mc^2 \operatorname{sh} \varphi, \quad (10.12)$$

où

$$\varphi = \operatorname{Argth}(v/c) \quad (10.13)$$

est appelée «rapidité».

On introduit souvent les paramètres

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (10.14)$$

pour alléger l'écriture. On voit que $\gamma = \operatorname{ch} \varphi$ et $\beta = \operatorname{th} \varphi$ et que les grandeurs dynamiques s'écrivent avec ces notations

$$W = \gamma mc^2 \quad \text{et} \quad p = \beta \gamma mc. \quad (10.15)$$

On dit parfois qu'une particule relativiste possède une masse inerte « en mouvement » γm plus grande que sa masse au repos m , et que cette masse devient infinie à l'approche de la vitesse de la lumière. Ce langage tend un peu à disparaître. En France, du moins, il a été strictement prohibé de l'enseignement secondaire (du temps où on y enseignait la Relativité) par des directives très strictes de l'Inspection Générale.

10.3.4 Cas des particules de masse nulle

Au cours de l'histoire, on a longtemps hésité entre une théorie corpusculaire et une description ondulatoire de la lumière. La physique moderne nous enseigne que la lumière combine subtilement ces deux aspects. Pour expliquer la distribution spectrale du rayonnement du corps noir, le seuil de fréquence de l'effet photoélectrique, les raies discrètes du rayonnement des atomes, etc., il faut admettre qu'un rayonnement de fréquence ν n'émet ou n'absorbe d'énergie que par quanta de valeur $h\nu$. Ces quanta sont appelés « photons ». Dans

cette relation, $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck. On utilise aussi la notation $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,582 \text{ MeV} \cdot \text{s}$.

La physique des interactions faibles (radioactivité β et ses généralisations) fait intervenir des neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ et les antineutrinos associés $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$, qui sont de masse nulle ou excessivement petite (en fait la limite supérieure expérimentale à la masse des neutrinos varie de quelques eV/c^2 pour ν_e et $\bar{\nu}_e$ à quelques MeV/c^2 pour ν_τ et $\bar{\nu}_\tau$, mais ces neutrinos étant le plus souvent produits avec beaucoup d'énergie, la masse, si elle existe, est négligeable pour les calculs cinématiques).

La vitesse c se retrouve aussi dans les théories de la Gravitation. C'est la vitesse du « graviton ». En somme, c est une constante fondamentale des théories relativistes, qui représente une vitesse maximale. On retrouve c chaque fois qu'une particule de masse nulle intervient.

Si on considère les relations (10.7–10.9) entre masse, vitesse et grandeurs dynamiques on trouve une limite satisfaisante quand $m \rightarrow 0$. La vitesse de la particule est égale à c , quelque soit l'énergie W , qui peut varier de 0 à ∞ . Pour des photons, la limite $W \rightarrow 0$ est un peu académique, car la physique des infra-rouges, des ondes radars ou des ondes radios est davantage ondulatoire que corpusculaire. La limite $W \rightarrow \infty$ correspond aux photons X puis γ de plus en plus énergétiques.

Notons la simplification

$$|\mathbf{p}| = W/c, \quad (10.16)$$

exacte pour des photons ou des neutrinos de masse nulle, et approximative pour des particules massives ultra-relativistes. Par exemple un électron d'énergie $W = 27 \text{ GeV}$ possède une quantité de mouvement p qui n'est inférieure à W/c que d'une fraction

$$\frac{W - pc}{W} = \frac{W^2 - p^2c^2}{W(W + pc)} \simeq \frac{m^2c^4}{2W^2} = 1,8 \times 10^{-10}, \quad (10.17)$$

puisque son énergie de masse est $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

10.4 Particule chargée dans un champ électrique

Considérons le cas d'une force \mathbf{f} uniforme et constante. En pratique, il s'agit d'une particule de charge q placée dans un champ électrique \mathbf{E} , tel que $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$. À la limite non-relativiste, on a un mouvement uniformément accéléré, dont les propriétés sont bien connues : vitesse longitudinale croissant linéairement avec le temps, trajectoire parabolique, etc. Du fait que la loi de Newton et la théorème de l'énergie cinétique persistent tels quels en Relativité, certains résultats du mouvement classique ne sont pas modifiés. Par exemple, fx reste l'énergie acquise après un déplacement x dans la direction de la force. Cependant, la forme des trajectoires et les lois horaires sont modifiées par la mécanique relativiste.

10.4.1 Vitesse initiale nulle

Imaginons d'abord une vitesse initiale nulle. Le mouvement s'effectue dans la direction et le sens imprimés par la force \mathbf{f} . Sur l'axe correspondant, on aura les lois d'évolution

$$p = ft \quad \text{et} \quad K = fx \quad (10.18)$$

de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, exactement comme pour le mouvement classique. Au lieu de reporter dans l'expression $K = \mathbf{p}^2/(2m)$, ce qui donnerait le résultat bien connu $x = mt^2/(2f)$, on utilise la relation de dispersion relativiste (10.5), et on trouve

$$x = \frac{1}{f} \left[\sqrt{m^2 c^4 + f^2 t^2 c^2} - mc^2 \right]. \quad (10.19)$$

La vitesse est tirée directement de $p = ft$, soit

$$v = c \frac{ft}{\sqrt{m^2 c^4 + f^2 t^2 c^2}}. \quad (10.20)$$

Une comparaison des lois d'évolution $x(t)$ et $v(t)$ non-relativistes et relativistes est présentée sur la Figure 10.2. Le calcul non-relativiste ne fait apparaître qu'une seule grandeur caractéristique, l'accélération f/m . Le traitement relativiste fait apparaître une vitesse c , un temps $\tau = mc/f$ et une distance $\xi = mc^2/f$ caractéristiques, à l'aide desquels on peut écrire les résultats ci-dessus

$$\frac{v}{c} = \frac{t/\tau}{\sqrt{1 + (t/\tau)^2}}, \quad \frac{x}{\xi} = \sqrt{1 + (t/\tau)^2} - 1, \quad (10.21)$$

l'approximation non-relativiste étant le premier terme du développement en t/τ . On voit sur ces graphes que le mouvement réel est moins rapide que la mécanique classique ne le suggère.

10.4.2 Vitesse initiale transverse

Donner une vitesse initiale longitudinale ne revient qu'à changer l'origine des temps. Il est plus intéressant de considérer une impulsion initiale $\mathbf{p}_0 = p_0 \mathbf{j}$, perpendiculaire à la force $\mathbf{f} = f \mathbf{i}$. En mécanique classique, la vitesse transverse se conserve, car la loi de Newton se projette en $mdv_y/dt = 0$; on combine donc un mouvement uniformément accéléré sur l'axe Ox à un mouvement uniforme sur l'axe Oy , ce qui conduit à une trajectoire parabolique.

En Relativité, il vaut mieux raisonner sur \mathbf{p} que sur \mathbf{v} . La loi de Newton implique que

$$p_y = p_0, \quad p_x = ft, \quad (10.22)$$

tandis que le bilan d'énergie est

$$W = W_0 + fx, \quad (10.23)$$

où

$$W_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2} \quad (10.24)$$

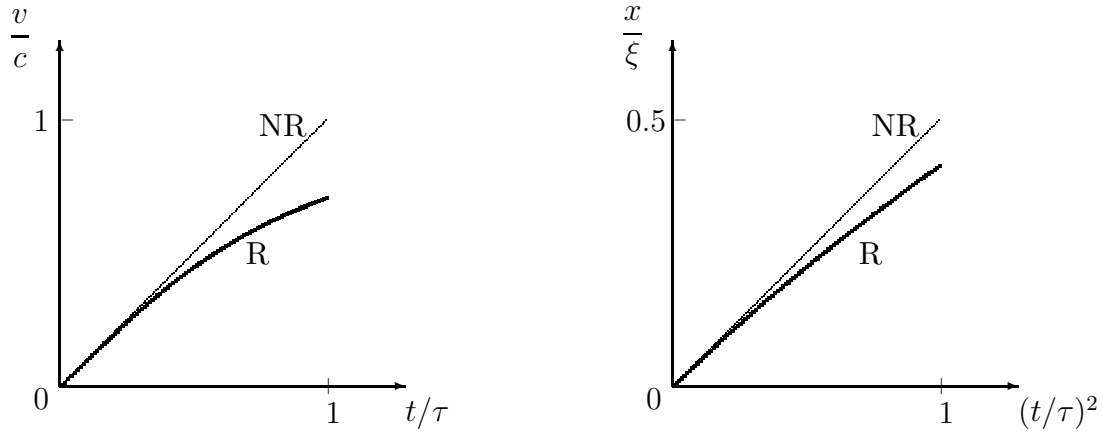


FIG. 10.2 – Vitesse v (en unités de c) et position x (en unités de $\xi = mc^2/f$), pour une particule soumise à une force constante f , et sans vitesse initiale. L'unité de temps est $\tau = mc/f$. En trait fin, l'approximation non-relativiste.

est l'énergie initiale. En reportant ces expressions dans la relation de dispersion (1.8), on obtient

$$x(t) = \frac{1}{f} [(W_0^2 + f^2 t^2 c^2)^{1/2} - W_0]. \quad (10.25)$$

On voit aussi que la vitesse transverse,

$$v_y = \frac{p_0 c^2}{W_0 + fx} = \frac{p_0 c^2}{(W_0^2 + f^2 t^2 c^2)^{1/2}}, \quad (10.26)$$

décroît régulièrement quand la particule s'avance dans le champ électrique. La trajectoire a de nouveau une branche parabolique, parce que $v_y/v_x \rightarrow 0$ ($v_y \rightarrow 0$ et $v_x \rightarrow c$) quand $x \rightarrow \infty$, et que le mouvement transverse n'est pas borné. On peut en effet vérifier que

$$y = \int v_y dt = \frac{p_0 c}{f} \operatorname{Argsh} \left(\frac{ftc}{W_0} \right) \quad (10.27)$$

croît infiniment. La trajectoire est une chaînette, d'équation

$$x = \frac{W_0}{f} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{yf}{p_0 c} \right) - 1 \right]. \quad (10.28)$$

Si on compare le vrai mouvement et l'approximation non relativiste, cette dernière surestime la vitesse dans les deux directions, car elle remplace $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/W$ par $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ pour une même fonction $\mathbf{p}(t)$. La comparaison des trajectoires est montrée sur la Figure 10.3. À quantité de mouvement initiale \mathbf{p}_0 donnée, la chaînette est intérieure à la parabole classique.

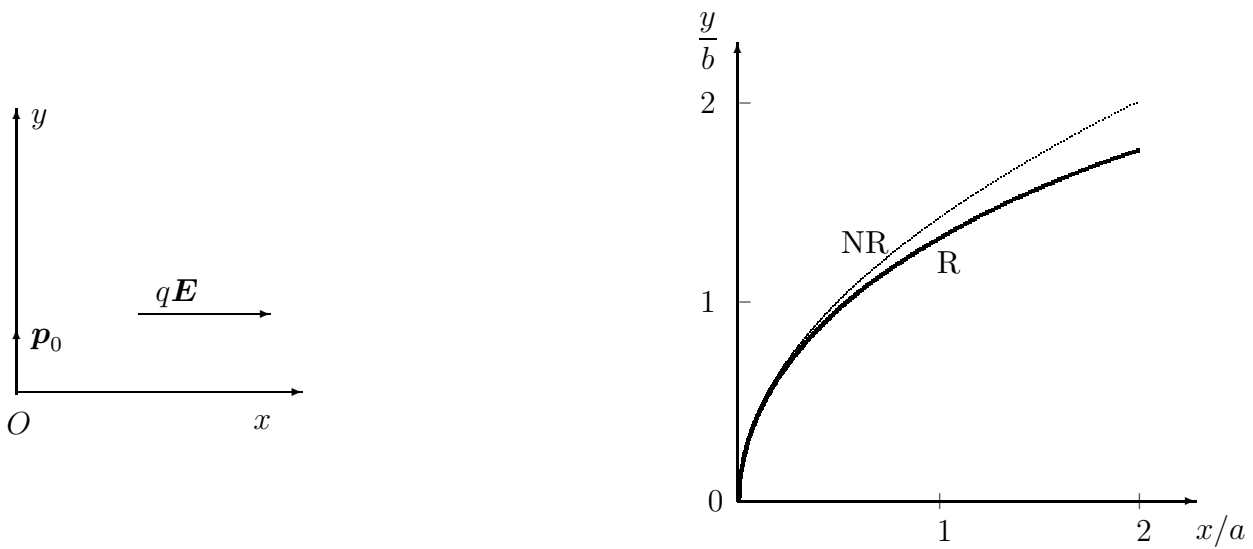


FIG. 10.3 – Trajectoire d'une particule chargée de masse m et de charge q lancée dans un champ électrique f/q parallèle à Ox avec une quantité de mouvement p_0 parallèle à Oy . En trait fin, la parabole de l'approximation non-relativiste. On a posé $a = W_0/f$, où $W_0 = (m^2c^4 + p_0^2c^2)^{1/2}$ est l'énergie initiale ($W_0 = mc^2$ à l'approximation non-relativiste), et $b = p_0c/f$.