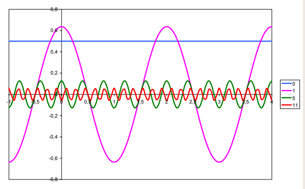
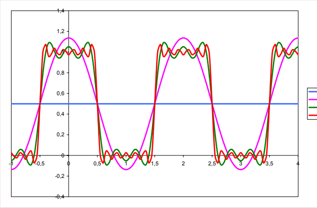
Régime permanent sinusoïdal

Régime permanent sinusoïdal

- 1. Introduction
- 2. Représentation complexe
- 3. Impédances complexes
- 4. Impédance d'un circuit RLC
- 5. Intérêt des notations complexes

Introduction

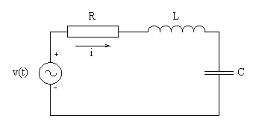




Impédance d'un circuit RLC

Equation :

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,v(t)}{dt}$$



$$v(t) = V_0\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{dv}{dt}(t) = V_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{F\left(t, i, i', i^{(2)}\right) = A_0\cos(\omega t + \varphi)}$$

Introduction

Equations différentielles d'ordre n

On appelle équation différentielle (ED), d'ordre n, toute relation de la forme :

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(i)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$$

liant une fonction inconnue y de la variable x et ses fonctions dérivées successives y', y'', ... , $y^{(n)}$

Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle d'ordre n est dite **linéaire** si F est une fonction **linéaire** de y, y', y'', ... , $y^{(n)}$

i.e. $$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = b(x)$$

La solution y est alors la somme

- d'une solution **particulière** de l'équation **complète**
- de la solution **générale** de l'équation **sans second membre**

Introduction

Cas particulier intéressant

- (a_i) forment un ensemble de coefficients **indépendants** de x
- la solution de l'équation sans second membre y_{SGSSM} est **stable**
- b(x) est une fonction **sinusoïdale** $b(x) = b_0 \cdot \cos(\omega x + \psi)$

Dans ce cas :

1. la solution particulière y_{SP} est de la forme :
$$y_{SP}(x) = y_{SP0} \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$
2. la solution de l'équation sans second membre y_{SGSSM} apparaît comme un **régime transitoire**
3. après un certain temps, **seule** la solution particulière joue un rôle prépondérant

➔il est possible de définir un **régime permanent sinusoïdal**

Régime permanent sinusoïdal

Définition

Le régime permanent sinusoïdal y(t) d'un système est la réponse temporelle de ce système à une *excitation sinusoïdale forcée* lorsque le régime transitoire peut être négligé

Conséquence

- Ce régime permanent sinusoïdal n'a de sens que si le système est stable (ex: retour à l'état initial après une excitation impulsionnelle)
- Ce régime permanent est de la forme :

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

- **Seules deux grandeurs sont à connaître**

Représentation complexe

Principe

A toutes fonctions sinusoïdales y(t) d'*amplitude* **a** et de *phase instantanée* ω **t +** φ, on peut faire correspondre un nombre complexe défini par :

$$\bar{y}(t) = a\,[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\sin(\omega t + \varphi)] = a\,e^{j(\omega t + \varphi)} = a\,e^{j\varphi}\,e^{j\omega t}$$

j = imaginaire pur : $j^2 = -1$ (*notation de physicien*)

Autrement dit, $y = \Re(\bar{y})$

Intérêt

– Les propriétés des fonctions complexes, et en particulier celles de la fonction exponentielle, simplifient les calculs et surtout permettent de retrouver un régime linéaire « effectif »

– Précisément, le calcul de la solution particulière se résume à la résolution d'un **système d'équations linéaires complexes**

Représentation complexe

Propriétés

Déphasage

$$e^{j(\omega t + \varphi + \phi)} = e^{j(\omega t + \varphi)}\, e^{j\phi}$$

se transforme en une multiplication par $e^{j\phi}$

Dérivation

$$\frac{d\,\bar{y}(t)}{dt} = j\,\omega\, a\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = j\,\omega\,\bar{y}(t)$$

se transforme en une multiplication par j ω

Intégration

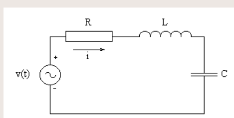
$$\int \bar{y}(t)\,dt = \frac{1}{j\,\omega}\, a\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{j\,\omega}\,\bar{y}(t)$$

se transforme en une division par j ω

Impédances complexes

Exemple :

$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,v(t)}{dt}$$



Notation complexe :

$$\bar{v}(t) = V\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = I\,e^{-j\varphi}\,e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}(t) = \bar{Z}(j\,\omega)\,\bar{i}(t)$$

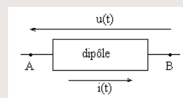
avec $\bar{Z}(j\omega) = R + j\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)$

$$\left(\text{solution particulière} : i(t) = \Re\left[Z(j\omega)\cdot V e^{(j\omega t)}\right]\right)$$

Impédances complexes

Définition

On appelle **impédance** d'un dipôle **linéaire passif** (résistance capacité ou self) la grandeur complexe Z(jω) qui relie dans la représentation complexe la différence de potentiel au courant



$$\bar{u}(t) = \bar{Z}(j\,\omega)\,\bar{i}(t)$$

$$\bar{Z}(j\,\omega) = R + j\,X = |\bar{Z}|\,e^{j\varphi}$$

Notation

- La partie réelle **R** de l'impédance est appelée **résistance**.
- La partie imaginaire **X** de l'impédance est appelée **réactance**.
- La grandeur **|Z|** est appelée **module** de l'impédance.
- La grandeur φ représente le **déphasage** de l'intensité i(t) **par rapport** à la tension u(t).

Impédances complexes

Notation (suite)

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{R - j\,X}{|\bar{Z}|^2} = G + j\,B = |\bar{Y}|\,e^{-j\varphi}$$

- La grandeur **Y** = 1/Z est appelée **admittance** du dipôle.
- La partie réelle **G** de l'admittance est appelée **conductance**.
- La partie imaginaire **B** de l'admittance est appelée **susceptance**

Remarque importante

$$\bar{u}(t) = \bar{Z}(j\,\omega)\,\bar{i}(t)$$

$$\bar{i}(t) = \bar{I}\,e^{j\omega t} = I_0\,e^{j\phi_i}\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{u}(t) = \bar{U}\,e^{j\omega t} = U_0\,e^{j\varphi_u}\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{U} = \bar{Z}(j\omega)\cdot\bar{I}$$

a ω fixé ⇨ plus nécessaire de préciser la dépendance en temps

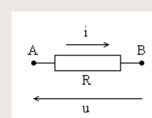
Impédances complexes

Résistance pure : $u(t) = v_A(t) - v_B(t) = R\,i(t)$

- En notation complexe :

$$\bar{u}(t) = U\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{u}(t) = R\,\bar{i}(t)$$



$$\bar{Z}_R(j\,\omega) = R$$

Impédances complexes

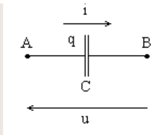
Condensateur parfait :

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= \frac{d\,q(t)}{dt} \\ q(t) &= C\,u(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad i(t) = C\,\frac{d\,u(t)}{dt}$$

• En notation complexe :

$$\bar{u}(t) = U\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = C\,\frac{d\,\bar{u}(t)}{dt} = j\,\omega\,C\,U\,e^{j\omega t} = j\,\omega\,C\,\bar{u}(t)$$



Déphasage entre tension et courant de $-\pi/2$

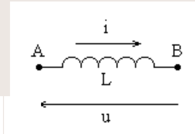
$$\boxed{\bar{Z}_C(j\,\omega) = \frac{1}{jC\,\omega} = \frac{1}{C\omega}\,e^{-j\pi/2}}$$

Impédances complexes

Inductance pure :

$$u(t) = L\,\frac{d\,i(t)}{dt}$$

• En notation complexe :



$$\bar{i}(t) = I\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{u}(t) = L\,j\omega\,I\,e^{j\omega t} = L\,j\,\omega\,\bar{i}(t)$$

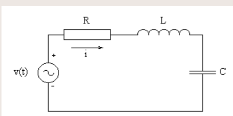
Déphasage entre tension et courant de $\pi/2$

$$\boxed{\bar{Z}_L(j\,\omega) = jL\,\omega = L\,\omega\,e^{j\pi/2}}$$

Impédance d'un circuit RLC

Equation :

$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,v(t)}{dt}$$



Notation complexe :

$$\bar{v}(t) = V\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = I\,e^{-j\varphi}\,e^{j\omega t}$$

$$\bar{v}(t) = \bar{Z}(j\,\omega)\,\bar{i}(t)$$

avec

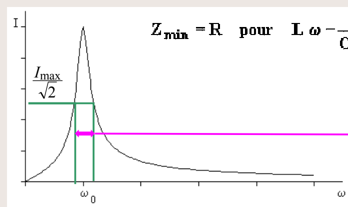
$$\bar{Z}(j\omega) = R + j\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)$$

$$\boxed{\bar{Z}_{eq}(j\omega) = \bar{Z}_R(j\omega) + \bar{Z}_C(j\omega) + \bar{Z}_L(j\omega)}$$

Impédance d'un circuit RLC

• Module

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$$



$$Z_{min} = R \quad \text{pour} \quad L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

facteur de qualité

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

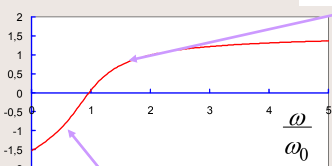
Impédance d'un circuit RLC

• Phase

$$\tan\varphi = \frac{X}{R} = \frac{L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}}{R}$$

Avance de phase de U sur i

φ [rad]



Retard de phase de U sur i

Intérêt des notations complexes

⇒ ***Toutes*** *les lois de base*

- nœuds, mailles,
- association en série, en parallèle,
- superposition, Norton, Thévenin…

obtenues pour les réseaux de résistances en régime continu restent, en ***notation complexe, valables*** *pour le régime* ***permanent sinusoïdal***

résistances <=> impédances

=> *Pas nécessaire de passer par les équations différentielles*